Un test d'une heure sera organisé le jeudi 25 avril sur ce devoir maison.

EXERCICE 1 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$.
On réalisera sur la copie une figure en prenant pour unité 2 carreaux (ou 2 cm). On complètera cette figure au fur et à mesure des questions.

On considère les points A, B et C du plan complexe d'affixes respectives

$$a = -1 + 2\mathrm{i} \quad ; \quad b = -2 - \mathrm{i} \quad ; \quad c = -3 + \mathrm{i}.$$

1. Placer les points A, B et C sur le graphique.
2. Calculer $\dfrac{b}{a}$, en déduire la nature du triangle OAB.
3. On considère l'application f qui à tout point M d'affixe z avec $z \neq 0$, associe le point M' d'affixe z' définie par
$$z' = \frac{z + 1 - 2\mathrm{i}}{z + 2 + \mathrm{i}}$$
   (a) Calculer l'affixe c' du point C', l'image de C par l'apllication f et placer le point C' sur la figure.
   (b) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe z avec $z \neq b$, tels que $|z'| = 1$.
   (c) Justifier que $\mathcal{E}$ contient les points O et C. Tracer $\mathcal{E}$.

EXERCICE 2 :

Une poutre de « lamellé-collé » est constitué d'éléments parallélépipèdiques appelés « lamelles ». Ces lamelles sont produites par une chaîne constituée de deux raboteuses ; la première rabote la lamelle à la largeur souhaitée, la seconde rabote la lamelle à la hauteur souhaitée. La largeur d'une lamelle k tirée au hasard dans la production est une varaible aléatoire L_k et sa hauteur une variable aléatoire H_k.

- L_k suit une loi normale d'espérance 150 mm et d'écart-type 0,23 mm ;
- H_k suit une loi normale d'espérance 10 mm et d'écart-type 0,1 mm ;
- L_k et H_k sont deux variables aléatoires indépendantes
(pour tout I_L et I_H, on a : $p((L_k \in I_L) \cap (H_k \in I_H)) = p(L_k \in I_L) \times p(H_k \in I_H)$)

1. Déterminer les probabilités : $p(149,4 < L_k < 150,6)$ et $p(9,8 < H_k < 10,2)$.

2. Un élément est acceptable si sa largeur appartient à l'intervalle $[149,4; 150,6]$ et sa hauteur à l'intervalle $[9,8; 10,2]$.

   (a) Quelle est la probabilité qu'une lamelle soit acceptable ?
   (b) Quelle est la probabilité qu'une seule des deux dimensions convienne ?
   (c) On souhaite qu'une lamelle soit acceptable avec la probabilité de 0,97. On effectue un seul réglage sur la raboteuse qui donne la hauteur. Dans quel intervalle doit-elle se trouver pour que la lamelle soit acceptable ?

3. (*hors programme*) Une poutre de « lamellé-collé » est constituée de la superposition de 5 lamelles prises au hasard dans la production. On note H_t la variable aléatoire prenant pour valeur la hauteur totale de la poutre et on admet que H_t suit une loi normale. Quels en sont les paramètres ?

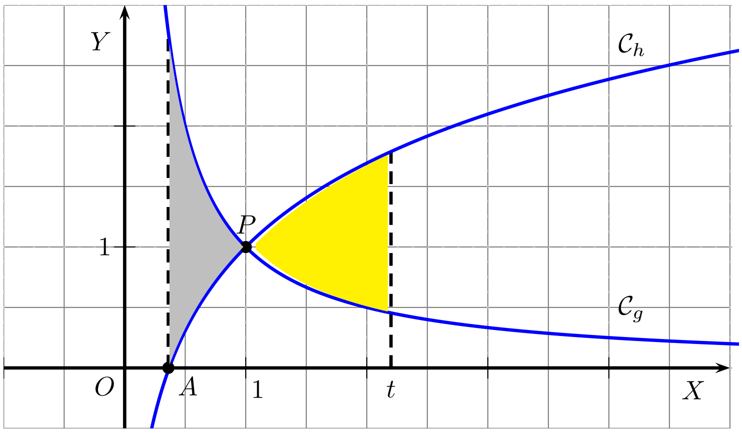
   (On pourra poser $H_t = H_1 + H_2 + H_3 + H_4 + H_5$) avec les variables H_i indépendantes deux à deux, ce qui permet d'utiliser deux propriétés (*à chercher*) pour calculer l'espérance et la variance de H_t)

EXERCICE 3 :

Partie A : On considère la fonction f définie sur l'intervalle I=$]0;+\infty[$par $f(x)=\ln(x)+1-\dfrac{1}{x}$

1. (a) Étudiez les variations de f sur I.
   (b) Déduisez-en le signe de $f(x)$ lorsque x décrit I.
2. (a) Vérifiez que la fonction F définie sur $]0;+\infty[$par $F(x)=(x-1)\ln(x)$ est une primitive de f sur I.
   (b) Justifiez que F est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.
   (c) Prouvez que l'équation $F(x)=1-\mathrm{e}^{-1}$ admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle $[1;+\infty[$. Donnez un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B : On considère les fonctions g et h définies sur $]0;+\infty[$par $g(x)=\dfrac{1}{x}$ et $h(x)=\ln(x)+1$.
Sur le graphique, on a tracé leurs courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$.



1. A est le point d'intersection de l'axe des abscisses et de $\mathcal{C}_h$. Quelles sont les coordonnées de A ?

2. P est le point d'intersection des courbes $\mathcal{C}_h$ et $\mathcal{C}_g$. Justifiez que les coordonnées de P sont $(1;1)$.

3. On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine limité par $\mathcal{C}_g$, $\mathcal{C}_h$ et les droites d'équations $x=\mathrm{e}^{-1}$ et $x=1$.
   (a) Exprimez, en unité d'aire, l'aire $\mathcal{A}$ à l'aide de la fonction f définie dans la partie A.
   (b) Prouvez que $\mathcal{A}=1-\mathrm{e}^{-1}$.

4. t est un nombre strictement supérieur à 1.
   On note $A(t)$ l'aire du domaine délimité par les droites d'équations $x=1$, $x=t$, et les courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$.
   On veut déterminer une valeur t telle que $A(t)=\mathcal{A}$.
   (a) Prouver que $A(t)=(t-1)\ln(t)$
   (b) Concluez.

EXERCICE 4 :

À tout entier naturel n non nul, on associe la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x)=\frac{4\mathrm{e}^{nx}}{\mathrm{e}^{nx}+7}.$$

On désigne par $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$.
Les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ sont données en annexe.

Partie A : Étude de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x)=\dfrac{4\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+7}$

1. Vérifier que pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{4}{1+7\mathrm{e}^{-x}}$.
2. (a) Démontrer que la courbe $\mathcal{C}_1$ admet deux asymptotes dont on précisera des équations.
   (b) Démontrer que la fonction f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   (c) Démontrer que pour tout réel x, $0 < f_1(x) < 4$.
3. (a) Démontrer que le point I_1 de coordonnées $(\ln(7); 2)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_1$.
   (b) Déterminer une équation de la tangente (T_1) à la courbe $\mathcal{C}_1$ au point I_1.
   (c) Tracer la droite (T_1).
4. (a) Déterminer une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.
   (b) Calculer la valeur moyenne de f_1 sur l'intervalle $[0; \ln(7)]$.

Partie B : Étude de certaines propriétés de la fonction f_n.

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul le point $\mathrm{A}\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_n$.
2. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul la courbe $\mathcal{C}_n$ et la droite d'équation $y = 2$ ont un unique point d'intersection dont on précisera l' abscisse.
   On note I_n ce point d'intersection.
   (b) Déterminer une équation de la tangente (T_n) à la courbe $\mathcal{C}_n$ au point I_n.
   (c) Tracer les droites (T_2) et (T_3).
3. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par

$$u_n = \frac{n}{\ln(7)} \int_0^{\frac{\ln(7)}{n}} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

   Montrer que la suite (u_n) est constante.