

Le but de l'exercice est de déterminer des couples  $(a, b)$  d'entiers vérifiant l'égalité (1) :

$$a^2 - 2b^2 = 1$$

1. On suppose que  $(a, b)$  est solution.
  - (a) Prouver que  $a$  est impair.
  - (b) En déduire que  $a^2 - 1$  est multiple de 4 puis que  $b$  est pair.
  - (c) Montrer que  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux.
2.
  - (a) Déterminer une solution évidente de l'équation (1).
  - (b) Montrer que si  $(a, b)$  est solution de (1), le couple  $(3a + 4b, 2a + 3b)$  l'est également.
  - (c) Déterminer 3 autres solutions de (1).
3.
  - (a) Écrire un algorithme qui affiche un couple d'entiers supérieurs à 1000 vérifiant (1).
  - (b) Le programmer sur une calculatrice ou sur un logiciel de votre choix. Quel couple affiche-t-il ?

### Info Mathématiques

L'équation  $\mathbf{a^2 - 2b^2 = 1}$  est dite de « Pell-fermat ». plus généralement, on appelle ainsi une équation de la forme  $\mathbf{x^2 - dy^2 = 1}$ , où  $x$  et  $y$  sont des entiers inconnus et  $d$  un entier naturel sans facteur carré. Fermat a montré qu'elle admet une infinité de solutions.