I Suite

I.1 Arthimético-géométrique

Soit (u_n) la suite numérique définie par son premier terme $u_1 = 4$ et par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 3u_{n+1} = u_n + 2.$$

1. Quel est le sens de variation de $(u_n)_{n>0}$? (on pourra représenter graphiquement la suite, conjecturer un minorant de u_n, le démontrer et conclure **ou** démontrer directement par récurrence le sens de variation conjecturé)
2. Quelle est la limite éventuelle l de $(u_n)_{n>0}$?
3. Montrer que $(u_n - l)_{n>0}$ est une suite géométrique dont on précisera la limite et le premier terme.
4. On pose $v_n = u_n - l$. Calculer v_n en fonction de n, en déduire les limites de $(v_n)_{n>0}$ et de $(u_n)_{n>0}$.
5. Calculer $V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$ et la limite de V_n, quand n tend vers $+\infty$. En déduire la valeur de $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ et la limite de U_n quand n tend vers $+\infty$.

Rappel : Lorsque n tend vers $+\infty$, La suite (q^n) tend vers $\begin{cases} +\infty & \text{si q} > 1 \\ 1 & \text{si q} = 1 \\ 0 & \text{si } -1 < \text{q} < 1 \\ \textit{pas de limite} & \text{si q} \leqslant -1 \end{cases}$

Notation : $\sum_{k=1}^{n} v_k$ signifie $v_1 + v_2 + \ldots + v_n$.

I.2 Récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

Soit E l'ensemble des suites vérifiant la relation de récurrence

$$u_{n+2} = 8u_{n+1} - 16u_n$$

1. Monter qu'il existe une suite géométrique dans E de premier terme 1. Déterminer sa raison.
2. Montrer que la suite de terme général $n4^n$ appartient à E.
3. Déterminer en fonction de n, le terme général de la suite (u_n) de E telle que $u_0 = 1$ et $u_1 = -1$.

II Fonctions

II.1 Bijection

Soit f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

1. Déterminer l'intervalle J tel que $\begin{aligned} f : [0; +\infty[&\longrightarrow J \\ x &\longmapsto \dfrac{1}{1+x^2} \end{aligned}$ soit une bijection.
2. Déterminer l'expresion de f^{-1} définie sur J.

f est une bijection de A dans B. Dans ce cas, on définit une application réciproque de B dans A notée f^{-1} :

$$\begin{aligned} f^{-1} : B &\longrightarrow A \\ y &\longmapsto f^{-1}(y) = x \text{ tel que } f(x) = y \end{aligned}$$

Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

II.2 Étude d'une fonction

$$\begin{aligned} f : \mathcal{D}_f &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}\sqrt{|x^2 - 4|} \end{aligned}$$

II.2.1 Quel est l'ensemble de définition de f ?

.

On admet que f est continue sur $\mathcal{D}_f$.

II.2.2 Déterminer les expressions de f sur $[-2;2]$ et sur $]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$

.

II.2.3 Déterminer les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$

.

II.2.4 Rechercher les asymptotes éventuelles au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$ (*méthode doc 3*)

.

II.2.5 Étude de la dérivabilité en 2

.

1. Étudier la limite de $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ lorsque x vers 2 par valeurs supérieures. (transformer $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ pour $x > 2$)
2. Étudier la limite de $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ lorsque x vers 2 par valeurs inférieures. Qu'en déduisez-vous ? (transformer $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ pour $0 < x < 2$)

II.2.6 Étudier les variations de f sur $\mathcal{D}_f$

II.2.7 Représenter $\mathcal{C}_f$ avec ses tangentes et ses asymptotes