I Le symbole $\sum$

I.1 Mise en place d'une notation

Une somme *finie* de nombre réels ou complexes notées $a_1, a_2, \ldots, a_n$ s'écrit $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Une notation plus compacte, utilisée dans l'enseignement supérieur est

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{k=n} a_k \qquad \text{ou de manière simplifiée} \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Exemple 1 Soit $m \in [\![1, n]\!]$, écrire en utilisant le symbole $\sum$, la somme $a_m + \ldots + a_n$.

Dans l'expression (1), la lettre k, appelée *indice*, est une variable *muette*, ce qui signifie que l'on peut changer son nom sans changer la somme :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

EXERCICE 1 Propriété de linéarité de la somme : démontrer que si $(a_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ et $(b_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ sont deux suites finies de nombres réels ou complexes, si λ et μ sont deux réels ou complexes, alors :

$$\sum_{j=1}^{n}(\lambda a_j + \mu b_j) = \lambda \sum_{j=1}^{n} a_j + \mu \sum_{j=1}^{n} b_j$$

I.2 Des exemples incontournables

- *Somme d'entiers consécutifs, de carrés d'entiers consécutifs, de cubes d'entiers consécutifs*

Écriture avec « points de suspension »	Écriture avec $\sum$
$1 + 2 + \ldots + n = \ldots\ldots$	
$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \ldots\ldots$	
$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \ldots\ldots$	

EXERCICE 2 Soit a et b, deux nombres réels ou complexes. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(ak+b)$.

- *Somme d'une progression géométrique*

La formule donnant la somme d'une progression géométrique s'écrit

$$\forall a \in \mathbb{C}, a \neq 1, n \in \mathbb{N},\ 1 + a + a^2 + \ldots + a^n = \boxed{\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}}$$

- *Nombres harmoniques*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le n−*ème* nombre harmonique H_n par $\boxed{H_n = \displaystyle\sum_{s=1}^{n} \frac{1}{s}}$

Les nombres H_n interviennent fréquemment en mathématiques. On ne dispose pas de formule simple « non sommatoire » pour H_n mais l'on peut obtenir une estimation de H_n en utilisant les intégrales (leçon à venir en obligatoire), on obtient

$\ln n \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln n$ → Conséquence pour la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$:

- Si l'on note P une loi de probabilité sur un univers Ω et X une variable aléatoire définie sur Ω telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ (valeurs prises par la variable).

L'espérance de la variable X, notée $E(X)$, est égale à ......

Écrire son expression en utilisant le symbole $\sum$.

I.3 Des exercices d'application

EXERCICE 3 Soit r un nombre réel appartenant à $]-1,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{j=0}^{n} r^j$. Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$. Proposer une notation pour cette limite.

EXERCICE 4 On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$

Simplifier $u_{n+1} - u_n$ et en déduire la monotonie de $(u_n)_{n \geqslant 1}$.

EXERCICE 5

1. Trouver une relation de récurrence entre H_n et H_{n-1} pour tout $n \geqslant 1$.
2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} H_k = nH_n - n$$

EXERCICE 6 En utilisant la formule de la progression géométrique et la dérivation, calculer, pour tout x réel et n dans $\mathbb{N}^*$,

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} kx^k$$

On distinguera le cas $x = 1$. Pour $-1 < x < 1$, déterminer la limite de la somme précédente lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 7 On lance un dé équilibré. On répète n fois l'opération, les lancers successifs étant supposés indépendants. Soit X la variable aléatoire donnant le premier instant d'apparition d'un 6, en convenant que $X = 0$ si 6 n'apparaît pas. Déterminer l'espérance de X. Quelle est sa limite lorsque n tend vers $+\infty$?

I.4 Sommes télescopiques

D'ordinaire le calcul d'une somme est une tâche est complexe. Dans certaines situations, cela est plus aisé, d'où l'intérêt de ne pas s'en priver lorsque c'est possible :

> Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes qui ont la particularité d'ête liées par
>
> $$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = b_{n+1} - b_n$$
>
> On a alors
>
> $$\sum_{k=0}^{n} a_k = b_{n+1} - b_0$$

démonstration :

I.4.1 Des exemples classiques

- *Progression arithmétique par télescopage*

  On a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\quad (k+1)^2 - k^2 = \dots\dots\dots,$

  Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2k+1$, en déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2k$, puis retrouver $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$

- *Une somme classique*

  Pour tout $x \notin \{0;1\}$, déterminer les réels a et b tels que
  $$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$
  En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$,
  $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$
  Calculer la limite, lorsque n tens vers $+\infty$, de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$. Comment peut-on écrire cette limite ?

> *Application :* Obtenir une majoration de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$
>
> Point de départ : Pour tout $k \geqslant 2$, $\quad \dfrac{1}{k^2} \leqslant \dots\dots\dots$

I.4.2 Des exercices d'application

EXERCICE 8 :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

Quelle est la limite de cette expression lorsque n tend vers $+\infty$?

• ◯ • ◯ •

EXERCICE 9 :

Déterminer trois réels a, b et c tels que

$$\forall x \notin \{0;-1;-2\}, \quad \frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$$

En déduire une expression simple de

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

Quelle est la limite de $(S_n)_{n\geqslant 1}$ lorsque n tend vers $+\infty$?

• ◯ • ◯ •

EXERCICE 10 :

Déterminer trois réels a, b et c tels que, si P est le polynôme de degré 3 défini par $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, on ait

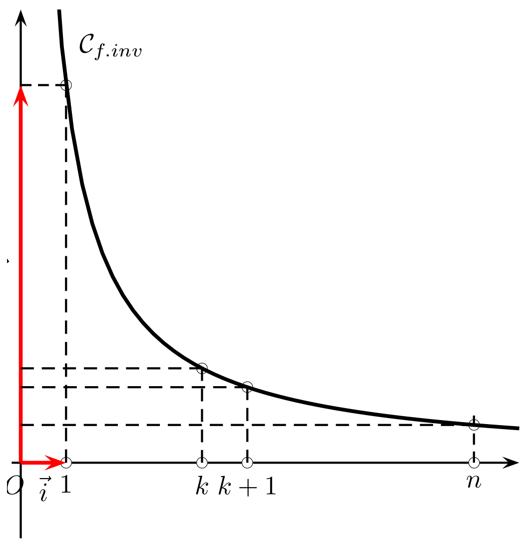
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) - P(x-1) = x^2$$

En déduire une expression simple de

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

• ◯ • ◯ •

EXERCICE 11 : Encadrement du n$-$è*me* nombre harmonique H_n



Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
Le point de départ est l'encadrement de la portion d'aire située au-dessus de l'axe des abscisses, sous la courbe de la fonction inverse et entre les droites d'équations $x = k$ et $x = k + 1$.