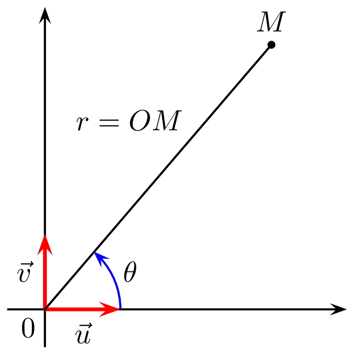
I Module et Argument d'un nombre complexe

Tout point M du plan peut être repéré par un couple de coordonnées polaires (r, θ) ($r > 0$, θ réel)

- r est la distance OM ;
- θ est une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.



Lien entre coordonnées cartésiennes et coordonnées polaires :
(r, θ) est un couple de coordonnées polaires de M et (x, y) les coordonnées cartésiennes de M :

$$\text{On a : } x = r cos\theta \ \text{ et } y = r sin\theta \Leftrightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ et } cos(\theta) = \frac{x}{r},\ sin(\theta) = \frac{y}{r}.$$

I.1 Définition

DÉFINITION : Soit z un nombre complexe non nul, M le point d'affixe z et (r, θ) un couple de coordonnées polaires de M. On décide des termes suivants :

- r est le module de z et cela se note $r = |z|$;
- θ est un argument de z et cela se note $\theta = \arg(z)[2\pi]$;

I.2 Propriétés :

- $z = x + iy$, on a : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ou encore $|z|^2 = x^2 + y^2 = z\overline{z}$
- Soit M d'affixe z, $\boxed{\arg(z) = (\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OM})\,(2\pi)}$
- Pour tout réel x, le module de x est la valeur absolue de x et :
  $*$ si $x > 0$, $\arg(x) = 0\,(2\pi)$;
  $*$ si $x < 0$, $\arg(x) = \pi\,2\pi)$; `(dessin)`
- $z \neq 0$, z imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg(z) = \pm\frac{\pi}{2}\,(2\pi)$ `(dessin)`
- $|z| = |\overline{z}|$ et $arg(\overline{z}) = -\arg(z)\,(2\pi)$; `(dessin)`
- $|-z| = |z|$ et $\arg(-z) = \pi + \arg(z)\,(2\pi)$; `(dessin)`

Exemple 1 Calculer le module et l'argument de $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_3 = -3i$ et $z_4 = 2 + 3i$

Tableau récapitulatif des propriétés vérifiées par module et argument :
Quels que soient les nombres complexes z et z' ($z' \neq 0$) :

Produit	$\lvert z \times z' \rvert = \lvert z \rvert \times \lvert z' \rvert$	$\arg(zz')$ $=\arg(z)+\arg(z')$ (2π)
Puissance	$\lvert z^n \rvert = \lvert z \rvert^n$	$\arg(z^n) = n\arg(z)$ (2π)
Inverse	$\left\lvert \frac{1}{z} \right\rvert = \frac{1}{\lvert z \rvert}$	$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$ (2π)
Quotient	$\left\lvert \frac{z}{z'} \right\rvert = \frac{\lvert z \rvert}{\lvert z' \rvert}$	$\arg\left(\frac{z}{z'}\right)$ $=\arg(z)-\arg(z')$ (2π)
Conjugué	$\lvert \overline{z} \rvert = \lvert z \rvert$	$\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$ (2π)
Opposé	$\lvert -z \rvert = \lvert z \rvert$	$\arg(-z) = \pi+\arg(z)$ (2π)

I.3 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

T H É O R È M E : Tout nombre complexe z non nul peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{z} = \mathbf{r}(\mathbf{cos}\theta + \mathrm{i}\,\mathbf{sin}\theta) \text{ où } \mathbf{r} = |\mathbf{z}| \text{ et } \theta = \mathbf{arg}(\mathbf{z})\ (\mathbf{2\pi}).$$

`Réciproquement` : Si un nombre complexe non nul z s'écrit sous la forme $z = r(cos\theta + \mathrm{i}sin\theta)$ avec $r > 0$ alors $|z| = r$ et $\arg(z) = \theta\ (2\pi)$.

L'écriture $z = r(cos\theta + \mathrm{i}\,sin\theta)$ s'appelle la forme trigonométrique de z.

EXERCICE 1

1. Quelle est la forme trigonométrique de $z_1 = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.
2. z_2 est un nombre complexe de module 3 et d'argument $-\frac{\pi}{4}$. Quelle est la forme algébrique de z_2 ?
3. $z_3 = -3(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$. z_3 est-il écrit sous forme trigonométrique ?

Remarque 1 Soit $z = r(cos\theta + \mathrm{i}sin\theta)$ et $z' = r'(cos\theta' + \mathrm{i}\,sin\theta')$ deux nombres complexes. Alors, on a :

- $zz' = rr'(cos(\theta + \theta') + \mathrm{i}\,sin(\theta + \theta'))$;
- $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}(cos(\theta - \theta') + \mathrm{i}\,sin(\theta - \theta'))$ $(z' \neq 0)$;

Exemple 2 d'utilisation de la forme trigonométrique :

1. Calculer $(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})^5$;
2. Déterminer une forme trigonométrique de $\frac{-\sqrt{3} + \mathrm{i}}{-1 - \mathrm{i}}$.
3. Déterminer une forme trigonométrique de $(\sqrt{3} + 3\mathrm{i})(3 - \mathrm{i}\sqrt{3})$.

EXERCICE 2 On considère le nombre complexe :

$$z = 1 - \sqrt{3} + \mathrm{i}\,(1 + \sqrt{3})$$

1. Écrire z^2 sous forme algébrique.
2. Déterminer le module et un argument de z^2.
3. Indiquer le signe de la partie réelle de z et celui de la partie imaginaire, puis, à l'aide des propriétés sur module et arguments, déterminer le module et un argument de z.
4. Déduire de ce qui précède les lignes trigonométriques de $\frac{7\pi}{12}$, puis de $\frac{\pi}{12}$.

II Notation Exponentielle

II.1 Notation

Si l'on pose $f(\theta) = cos\theta + isin\theta$, la *remarque* 1 prouve que $f(\theta+\theta') = f(\theta) \times f(\theta')$
De plus si l'on applique la formule de la dérivée d'une somme à la fonction $f = cos + \mathrm{i}\, sin$, on obtient : $f'(\theta) = \mathrm{i} f(\theta)$, d'où par analogie avec les relations vérifiées par l'exponentielle, on définit :

D É F I N I T I O N : Pour tout réel θ, **on pose** $e^{\mathrm{i}\,\theta} = cos\theta + \mathrm{i}\, sin\theta$

CONSÉQUENCES :

- Tout nombre complexe z non nul, de module r et d'argument θ s'écrit $z = re^{\mathrm{i}\,\theta}$: cette écriture est appelée **forme exponentielle de** z et `réciproquement`, de la même manière qu'avec la forme trigonométrique : si $z = re^{\mathrm{i}\,\theta}$ et $r > 0$, alors $|z| = r$ et $arg(z) = \theta[2\pi]$.
- (important) $|e^{\mathrm{i}\,\theta}| = 1$ et $arg(e^{\mathrm{i}\,\theta}) = \theta[2\pi]$.
- Grâce aux propriétés des formes trigonométriques (th.2.) vues précédemment, l'exponentielle complexe possède des propriétés qui rappellent celles de l'exponentielle réelle :

$$e^{\mathrm{i}\,\theta} \times e^{\mathrm{i}\,\theta'} = e^{\mathrm{i}\,(\theta+\theta')} \; ; \; \frac{e^{\mathrm{i}\,\theta}}{e^{\mathrm{i}\,\theta'}} = e^{\mathrm{i}\,(\theta-\theta')} \; ; \; (e^{\mathrm{i}\,\theta})^n = e^{\mathrm{i}\,n\theta} \; ; \; \overline{e^{\mathrm{i}\,\theta}} = e^{-\mathrm{i}\,\theta}.$$

EXERCICE 3 :
Écrire les nombres suivants sous forme algébrique : $e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{6}}$ et $4e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}$.
Donner la forme exponentielle des nombres suivants : 1 ; -1 ; i ; $-\mathrm{i}$; $\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$; $1+\mathrm{i}$; $(1-\mathrm{i})^8$.

II.2 FORMULES de MOIVRE et D'EULER

Formules de MOIVRE : Pour tout θ et tout entier n :

- $(cos\theta + \mathrm{i}\, sin\theta)^n = cos(n\theta) + \mathrm{i}\, sin(n\theta)$ (reformulation de $(e^{\mathrm{i}\,\theta})^n = e^{\mathrm{i}\,n\theta}$)
- $(cos\theta - \mathrm{i}\, sin\theta)^n = cos(n\theta) - \mathrm{i}\, sin(n\theta)$ (changement en $-\theta$ dans la formule précédente)

Formules d'EULER :

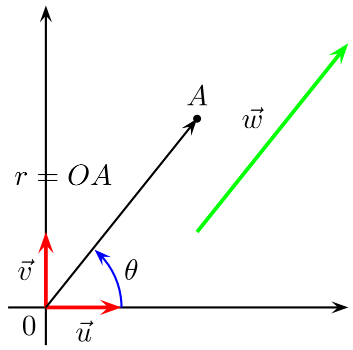
Pour tout réel θ : $cos\theta = \dfrac{e^{\mathrm{i}\,\theta} + e^{-\mathrm{i}\,\theta}}{2}$ et $sin\theta = \dfrac{e^{\mathrm{i}\,\theta} - e^{-\mathrm{i}\,\theta}}{2\mathrm{i}}$

III Nombres complexes en géométrie

III.1 Module et argument de l'affixe d'un vecteur

Soit $\vec{w}$ un vecteur d'affixe $z_{\vec{w}}$ et A le point tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{w}$.
D'après ce qui précède, $z_{\vec{w}} = z_{\overrightarrow{OA}} = z_A - z_O = z_A$ car $z_O = 0$,
donc nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} |z_{\vec{w}}| = |z_A| = OA = ||\vec{w}|| \\ arg(z_{\vec{w}}) = arg(z_A) = (\vec{u}, \overrightarrow{OA}) = (\vec{u}, \vec{w})[2\pi] \end{array} \right.$$



III.1.1 Module et argument de $z_B - z_A$

A et B sont deux points d'affixes respectives z_A et z_B dans le plan complexe repéré par $(O\,; \vec{u}, \vec{v})$ orthonormé. On a :

$$\boxed{|\mathbf{z_B} - \mathbf{z_A}| = \mathbf{AB}}$$

démonstration : ......

Exemple 3 Soit $A(1 - 2\mathrm{i})$, $B(3 + 2\mathrm{i})$ et $C(-3)$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

$\Longrightarrow$ Utilisation dans la recherche d'ensemble de points :

- $M(z)$ vérifie $|z - z_1| = r$ $(r > 0)$. On pose ......

- $M(z)$ vérifie $|z - z_1| = |z - z_2|$. On pose ......

Exemple 4 Quel est l'ensemble des points $M(z)$ qui vérifient $|z + 3\mathrm{i}| = |z - 1 + \mathrm{i}|$?

A et B sont deux points d'affixes respectives z_A et z_B dans le plan complexe repéré par $(O\,; \vec{u}, \vec{v})$ orthonormé direct. On a :

$$\boxed{\arg(\mathbf{z_B} - \mathbf{z_A}) = (\overrightarrow{u}\,; \overrightarrow{AB})}$$

démonstration : ......

Exemple 5 Soit $A(-2 - 2\mathrm{i})$, $B(3 + 3\mathrm{i})$. Calculer $(\overrightarrow{u}\,; \overrightarrow{BA})$.

Remarque 2 Il faudra être vigilant car $|z_B - z_A| = |z_A - z_B|$ en effet $AB = BA$ mais $\arg(z_B - z_A) \neq \arg(z_A - z_B)$. A vérifier ....

III.1.2 Module et argument de $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$

Soit $\vec{w}$ et $\vec{w'}$ des vecteurs non nuls d'affixes respectives $z_{\vec{w}}$ et $z_{\vec{w'}}$, on a :

$$\mathbf{arg}\left(\frac{\mathbf{z_{\tilde{w}'}}}{\mathbf{z_{\tilde{w}}}}\right) = (\tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{w}}')\ (\mathbf{2}\pi)$$

démonstration : ......

<u>PROPRIÉTÉS :</u>

Soit $\tilde{\mathbf{w}}$ et $\tilde{\mathbf{w}}'$ des vecteurs non nuls d'affixes respectives $z_{\vec{w}}$ et $z_{\vec{w'}}$.

- $\tilde{\mathbf{w}}$ et $\tilde{\mathbf{w}}'$ colinéaires $\Leftrightarrow \frac{\mathbf{z_{\tilde{w}'}}}{\mathbf{z_{\tilde{w}}}}$ réel ;
- $\tilde{\mathbf{w}}$ et $\tilde{\mathbf{w}}'$ orthogonaux $\Leftrightarrow \frac{\mathbf{z_{\tilde{w}'}}}{\mathbf{z_{\tilde{w}}}}$ imaginaire pur .

Exemple 6 d'utilisation :
A, B, C et D sont quatre points deux à deux distincts d'affixes respectives z_A, z_B, z_c et z_D. Exprimer en fonction d'un angle orienté de vecteurs $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$. Exprimer $\left|\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right|$ en fonction de AB et CD.

En résumé, pour quatre points quelconque A, B, C et D $(B \neq A)$

$$\left|\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right| = \frac{CD}{AB} \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD})\ (2\pi)$$

Remarque 3 En particulier, $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$ et $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) =$ .... (2π)

EXERCICE 4 Reprendre l'exemple 3 et prouver, en utilisant la relation avec les angles orientés de vecteurs que le triangle ABC est rectangle en A.