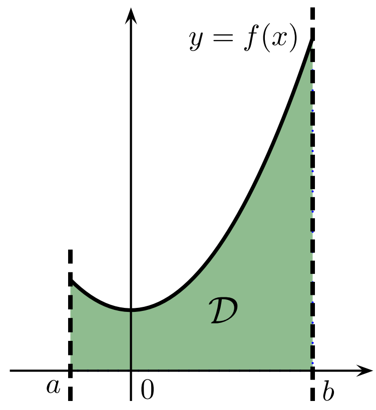
I INTÉGRALE d'une fonction continue et positive

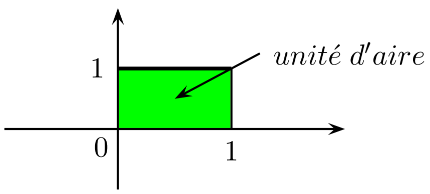
I.1 Domaine associé à une fonction positive

Le domaine $\mathcal{D}$ délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est appelé domaine associé à une fonction positive sur $[a; b]$.



$$\mathcal{D} = \{M(x; y) \text{ tels que } a \leqslant x \leqslant b \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

Unité d'aire :



Exemple 1 :
Voir Document : « Aire sous la courbe d'une fonction positive ».

I.2 Intégrale d'une fonction continue positive

DÉFINITION : Soit f une fonction **continue** et **positive** sur $[a; b]$ avec $a \leqslant b$.
On appelle **intégrale de a à b de la fonction** f l'aire du domaine associé à f sur $[a; b]$, exprimée en unité d'aire.

Ce nombre est noté $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$

- ▷ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ se lit « intégrale de a à b de $f(x)\,\mathrm{d}x$ ».
- ▷ a et b sont les **bornes de l'intégrale**.
- ▷ la lettre x dans l'intégrale peut être remplacée par t, s, ..., c'est une variable muette.

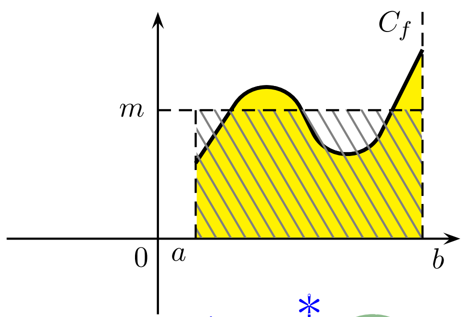
de sorte que : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(s)\,\mathrm{d}s = \dots$

Exemple 2 :
Calculer $\displaystyle\int_0^2 2x + 1\,\mathrm{d}x$ puis $\displaystyle\int_a^b m\,\mathrm{d}x$ où $m \in \mathbb{R}^+$ et $a \leqslant b$.

I.3 Valeur moyenne d'une fonction continue positive

Soit f une fonction **continue** et **positive** sur $[a; b]$ avec $a \leqslant b$.
La **valeur moyenne** de la fonction f sur $[a; b]$ est le réel :

$$\boxed{m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad (1)}$$



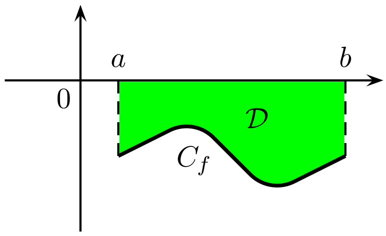
`Interprétation graphique` : L'aire du domaine associé à f sur $[a; b]$ est égale à celle du rectangle de dimensions $b - a$ et m.

II Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

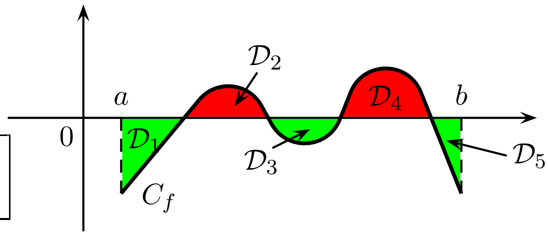
f est une fonction continue sur $[a,b]$ avec $a \leqslant b$. On appelle **intégrale de a à b de f** le nombre défini de la façon suivante :

* Si f est **négative** sur $[a,b]$:

$$\boxed{\int_a^b f(s)\mathrm{d}s = -\mathrm{aire}(\mathcal{D})}$$



Remarque 1 *Une intégrale peut donc prendre une valeur négative .... Calculer* $\displaystyle\int_1^3 -x\,\mathrm{d}x$.



* Si f est de **signe quelconque** sur $[a,b]$:

$$\boxed{\int_a^b f(s)\mathrm{d}s = -\mathrm{aire}(\mathcal{D}_1) + \mathrm{aire}(\mathcal{D}_2) - \mathrm{aire}(\mathcal{D}_3) + \mathrm{aire}(\mathcal{D}_4) - \mathrm{aire}(\mathcal{D}_5)}$$

Remarque 2 *Une intégrale peut être nulle sans que la fonction f soit la fonction nulle. Calculer* $\displaystyle\int_{-1}^3 (2x-2)\,\mathrm{d}x$.

III Primitives d'une fonction

III.1 Primitive

D É F I N I T I O N : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle **primitive** de f sur I toute fonction F **dérivable** sur I vérifiant pour tout x de I :

$$F'(x) = f(x)$$

Exemple 3 :
Déterminer une primitive des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

$$f : x \longmapsto x \qquad g : x \longmapsto x^3 \qquad h : x \longmapsto x^n \ (n \in \mathbb{N})$$

Primitives des fonctions suivantes définies sur $]0;+\infty[$:

$$f : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad g : x \longmapsto \frac{1}{x} \qquad h : x \longmapsto \mathbf{e}^{-x}$$

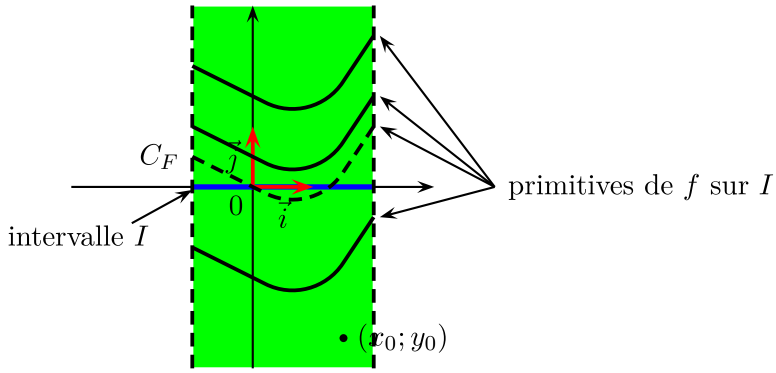
Exercices du livre : 43 à 50 page 202 ; 56 à 58 page 203.

III.2 Ensemble de primitives

T H É O R È M E : Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I.

▷ Quel que soit $k \in \mathbb{R}$, la fonction $G : x \longmapsto F(x) + k$ est aussi une primitive de f sur I.

▷ Toute primitive de f sur I s'obtient en ajoutant une constante réelle à une primitive quelconque de f.



III.3 Primitive et condition initiale

Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I.Soit x_0 un réel de I et y_0 un réel quelconque.
Alors il existe une unique primitive F de f sur I vérifiant la condition $F(x_0) = y_0$.

Traduction graphique :

EXERCICE 1 : Soit a un nombre réel. On définit la fonction H sur $[0; +\infty[$ par $H(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + a$.

1. Prouver que H est une primitive de $x \longmapsto \sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$.
2. Déterminer la primitive de la fonction racine carrée qui vaut 1 en 1.

III.4 Intégrale et primitive

THÉORÈME : Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un nombre de I.
La fonction $F : x \longmapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur I.

C'est **l'unique primitive** de f qui s'annule en a.

Démonstration difficile (seulement dans le cas d'une fonction continue croissante et positive sur I)

Exercices du livre : 59 à 61 page 203.

Conséquence : Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

III.5 Théorème fondamental du calcul intégral

Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant a et b. On a le résulat capital suivant :

$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = G(b) - G(a)$ où G est une **primitive quelconque** de f sur I.

`Notation` : le nombre $G(b) - G(a)$ se note $[G(t)]_a^b$

Démonstration :

• ○ •

Exemple 4 Calculer $\int_0^{\pi} \sin(u)\mathrm{d}u$ puis $\int_{-1}^{1} \frac{1}{2s+3}\mathrm{d}s$

III.6 Tableaux de primitives

`Tableaux donné en ANNEXE.`

Exemple 5 Calculer $I = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{t\ln t}\mathrm{d}t$; $K = \int_0^1 s\sqrt{s^2+1}\mathrm{d}s$ et $L = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln s}{s}\mathrm{d}s$

IV Propriétés de l'intégrale

IV.1 Propriétés

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I contenant a et b.

- Pour tout a de I : $\int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0$
- Pour tous a, b et c de I : $\int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$
- Si $a \leqslant b$: $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\mathrm{d}t$
- α et β deux réels : $\int_a^b [\alpha f(t) + \beta g(t)]\mathrm{d}t = \alpha\int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \beta\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$

• ○ •

Exemple 6 Calculer $\int_0^1 5\mathrm{e}^{2x} + 3x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$

IV.2 Intégrales et inégalités

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ avec $a \leqslant b$.

- **Positivité** : Si $f \geqslant 0$ sur $[a, b]$, alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$.
- **Intégration d'une inégalité** : Si $f \geqslant g$ sur $[a, b]$, alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.
- **Inégalités de la moyenne** :
  - Si pour tout x de $[a, b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$ alors $m(b-a) \leqslant \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leqslant M(b-a)$
  - Si pour tout x de $[a, b]$, $|f(x)| \leqslant M$ alors $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant M(b-a)$

• ○ •

EXERCICE 2 On pose, pour $n \geqslant 1$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$
Sans calculer I_n :

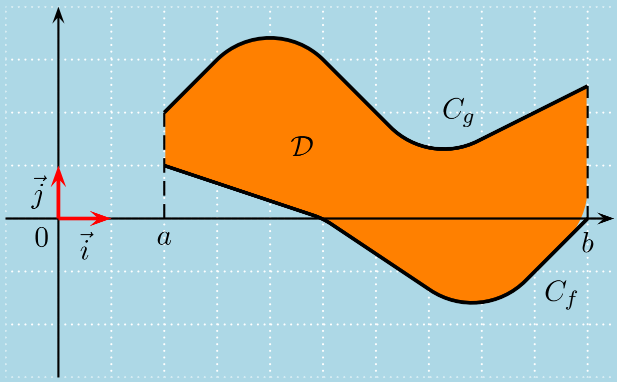
1. Étudier le sens de variation de la suite (I_n) ;
2. Déterminer, à l'aide d'un encadrement, la limite de la suite (I_n).

V Calcul d'aires et de volumes

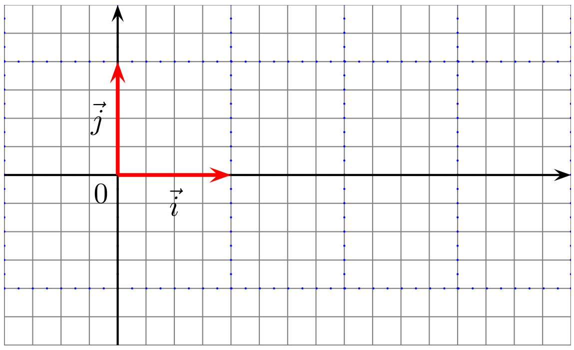
T H É O R È M E : Soit f et g deux fonctions continues sur I, a et b deux réels de I tels que $a \leqslant b$.

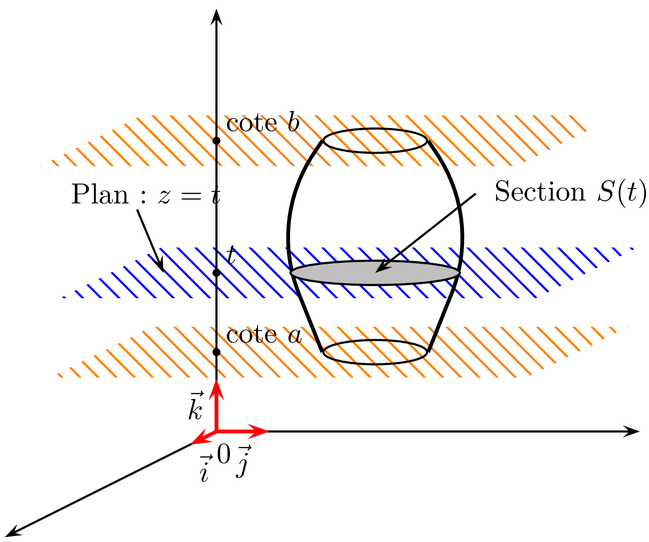
Lorsque $f \leqslant g$ sur $[a, b]$, l'aire du domaine $\mathcal{D}$ délimité par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ se calcule avec :

$$\boxed{\text{aire}(\mathcal{D}) = \int_a^b (g(t) - f(t))\mathrm{d}t}$$



`Exemple :` Aire du domaine entre les courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \pi$.





Soit un solide délimité par les plans d'équations respectives $z = a$ et $z = b$.

Tout plan d'équation $z = t$, avec $t \in [a, b]$ coupe ce solide suivant une section d'aire $S(t)$, en unités d'aire.

Lorsque S est une fonction continue de t, on admet que le volume V du solide est, en unités de volume :

$$\boxed{V = \int_a^b S(t)\mathrm{d}t}$$

`Application :` Volume d'une boule de rayon R.

ANNEXE : Tableau des primitives usuelles

Fonction f	Fonction primitive F	Intervalle
$x \longmapsto a,\ a \in \mathbb{R}^*$	$x \longmapsto ax + K$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^n,\ n \in \mathbb{N}$	$x \longmapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + K$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	$x \longmapsto \ln\lvert x\rvert + K$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x^n} = x^{-n},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$	$x \longmapsto \dfrac{x^{-n+1}}{-n+1} + K = \dfrac{1}{(-n+1)x^{n-1}} + K$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$x \longmapsto 2\sqrt{x} + K$	$]0, +\infty[$
$x \longmapsto x^\alpha,\ \alpha > 0$	$x \longmapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + K$	$]0, +\infty[$
$x \longmapsto e^x$	$x \longmapsto e^x + K$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \mathbf{e}^{ax+b}$ avec $a \in \mathbb{R}^*,\ b \in \mathbb{R}$	$x \longmapsto \dfrac{1}{a}\mathbf{e}^{ax+b} + K$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \cos x$	$x \longmapsto \sin x + K$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \sin x$	$x \longmapsto -\cos x + K$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \sin(ax+b)$ avec $a \in \mathbb{R}^*,\ b \in \mathbb{R}$	$x \longmapsto -\dfrac{1}{a}\cos(ax+b) + K$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \cos(ax+b)$ avec $a \in \mathbb{R}^*,\ b \in \mathbb{R}$	$x \longmapsto \dfrac{1}{a}\sin(ax+b) + K$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$x \longmapsto \tan x + K$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Si la primitive cherchée n'est pas dans le tableau précédent, utiliser le tableau suivant où u est une fonction usuelle dérivable sur un intervalle.

Fonction	Fonction primitive	Intervalle
$u'u^n$ avec $n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1} + K$	intervalle contenu dans D_u
$\dfrac{u'}{u^n} = u'u^{-n}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$	$\dfrac{u^{-n+1}}{-n+1} + K = \dfrac{1}{(-n+1)u^{n-1}} + K$	intervalle contenu dans $D_u \cap \{x \text{ tq } u(x) \neq 0\}$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + K$	intervalle contenu dans $D_u \cap \{x \text{ tq } u(x) > 0\}$
$u'u^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + K$	intervalle contenu dans D_u
$u'\mathbf{e}^u$	$\mathbf{e}^u + K$	intervalle contenu dans D_u
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert + K$	intervalle contenu dans D_u