I Fonction réciproque d'une fonction

I.1 Définition d'une bijection

Le théorème dit « de la bijection » permet d'établir une bijection entre un intervalle I et un intervalle J. Il est venu le moment de donner une définition « propre » d'une telle fonction.

> I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$. f est une bijection de I sur J signifie que :
>
> « Pour tout y de J, il existe un unique $x \in I$ tel que $y = f(x)$. »
>
> ou *Tout de nombre de J admet exactement un antécédent dans I par f.*

Exemple 1

- $f : x \longmapsto x^2$ définie sur $[0; 3]$ est une bijection de $[0; 3]$ sur $[0; 9]$.
- $f : x \longmapsto x^2$ définie sur $[-3; 3]$ n'est pas une bijection. (en effet, 4 qui partie de $[0; 9]$ admet deux antécédents -2 et 2 dans $[-3; 3]$).

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] & y \arrow[l, bend left, "\cdots"] \end{tikzcd}$$

$x \in I$ $\qquad$ $y \in J$

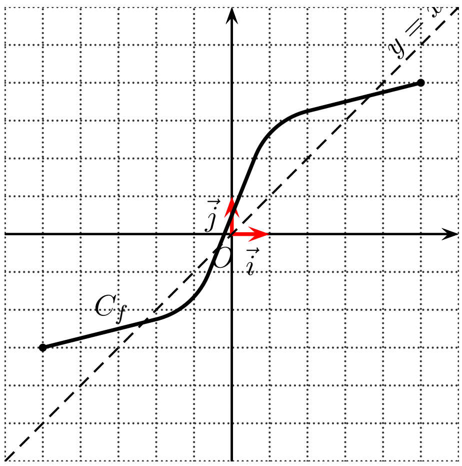
Si f est une bijection de I sur J, il existe une fonction définie sur J, notée f^{-1}, appelée fonction réciproque de f :

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cdots \\ \cdots \end{cases}$$

I.2 Représentation graphique d'une fonction réciproque

Résultat : Dans un repère orthonormal, les courbes représentatives de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$.

Cela permet en particulier, d'en déduire :
- des calculs de limites ;
- des existences de tangentes (dérivabilité) ;



I.3 Des exemples déjà rencontrés

- $\begin{aligned} \cos : [0; \pi] &\longrightarrow [-1; 1] \\ x &\longmapsto \cos(x) \end{aligned}$ La fonction *cosinus* réalise une bijection de $[0; \pi]$ sur $[-1; 1]$: elle admet la bijection réciproque notée *arccosinus* définie de la façon suivante $\begin{aligned} \arccos : [-1; 1] &\longrightarrow [0; \pi] \\ x &\longmapsto \arccos(x) \end{aligned}$

- $\begin{array}{rcl} \sin : [-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & [-1;1] \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$ La fonction *sinus* réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}]$ sur $[-1;1]$: elle admet la bijection réciproque notée *arcsinus* définie de la façon suivante $\begin{array}{rcl} \arcsin : [-1;1] & \longrightarrow & [-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}] \\ x & \longmapsto & \arcsin(x) \end{array}$

II Fonction logarithme népérien

Au chapitre 6, nous avons vu que la fonction exponentielle ($\mathbf{exp} : x \longmapsto e^x$) est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi grâce au théorème vu en L2, **exp** réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0;+\infty[$. D'après le paragraphe précédent, elle admet donc une fonction réciproque définie sur $]0;+\infty[$.

II.1 Définition

La fonction **logarithme népérien** est la fonction réciproque de la fonction exponentielle. Elle est notée **ln**. Elle est définie sur $]0;+\infty[$ et réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \ln x \\ x \in]0;+\infty[\end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \mathbf{e}^y \\ y \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

II.2 Conséquences

Conséquences

- $\boxed{\ln(1) = 0}$ *car* $\mathbf{e}^0 = 1$;
- $\boxed{\ln(\mathbf{e}) = 1}$ *car* $\mathbf{e}^1 = \mathbf{e}$; ;
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\ln(\mathbf{e}^x) = x}$
- Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $\boxed{\mathbf{e}^{\ln x} = x}$

II.3 Dérivabilité, Sens de variation et équivalences importantes

On admet que la fonction **ln** est dérivable sur $]0;+\infty[$ (et donc continue sur cet intervalle ! Leçon 2)
Pour $x \in]0;+\infty[$, on considère la fonction $u : x \longmapsto \exp(\ln x)$.

u est-elle dérivable sur $]0;+\infty[$?

En remarquant que $u(x) = x$, en déduire la dérivée de la fonction **ln** pour $x > 0$.

▷ La fonction **logarithme népérien** est dérivable sur $]0;+\infty[$ et, pour tout $x > 0$, $\boxed{\ln'(x) = \frac{1}{x}}$;

▷ La fonction **logarithme népérien** est **strictement croissante** sur $]0;+\infty[$.

Dernière propriété qui permet d'écrire que, x et y étant des réels strictement positifs :

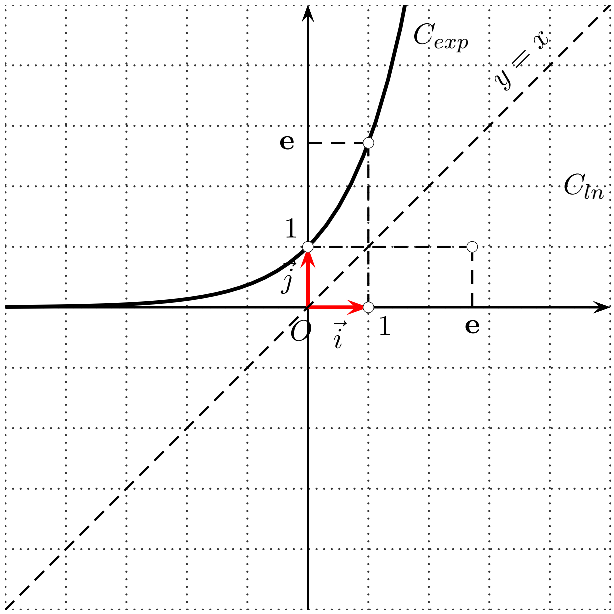
- ► $\boxed{\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y}$;
- ► $\boxed{\ln(x) < \ln(y) \Leftrightarrow x = y}$.

Signe de $\ln(x)$

- ► $\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$;
- ► $\ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$;
- ► $\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

II.4 Représentation graphique de la fonction $\ln$

Les courbes représentatives de $\ln$ et de $\exp$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$, ce qui donne :



Les limites à retenir et déduites de celles de la fonction exponentielle par symétrie :

- $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty}$
- $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty}$
- $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0 \quad (\bigstar)}$

EXERCICE 1 On considère la fonction $\begin{array}{l} f : [1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \ \longmapsto f(x) = \ln(x) - 2\sqrt{x} \end{array}$ Réaliser l'étude de la fonction f, en déduire que pour $x \geqslant 1,\ 0 \leqslant \dfrac{\ln(x)}{x} < \dfrac{2}{\sqrt{x}}$, puis démontrer la limite $(\bigstar)$.

II.5 Propriétés de la fonction $\ln$

Pour tous réels x et y strictement positifs et pour tout entier relatif n, on a :

Propriétés

- $\boxed{\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)}$, **démo** : *Se déduit de la propriété,* $\mathbf{e}^{X+Y} = \mathbf{e}^X \times \mathbf{e}^Y$, *poser* $X = \ln(x)$ *et* $Y = \ln(y)$
- $\boxed{\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)}$, **démo** : *Se déduit de la propriété,* $\mathbf{e}^{-X} = \dfrac{1}{\mathbf{e}^X}$, *poser* $X = \ln(x)$.
- $\boxed{\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)}$ **démo** : *Utiliser les deux premières propriétés avec* $\dfrac{x}{y} = x \times \dfrac{1}{y}$
- $\boxed{\ln\left(x^n\right) = n\ln(x)}$ **démo** : *Se déduit de la propriété* $\mathbf{e}^{nX} = (\mathbf{e}^X)^n$, *poser* $X = \ln(x)$
- $\boxed{\ln\left(\sqrt[n]{x}\right) = \dfrac{1}{n}\ln(x) \quad (n \geqslant 1)}$ **démo** : *Se déduit de la propriété* $\mathbf{e}^{\frac{X}{n}} = \sqrt[n]{\mathbf{e}^X}$, *poser* $X = \ln(x)$

Exemple 2 Exprimer les nombres $A = \ln(36)$ et $B = \ln(2,25)$ en fonction de $\ln(2)$ et de $\ln(3)$.

II.6 Utilisation des propriétés de $\ln$: résolution d'équation, d'inéquation

▷ On considère l'équation $(E):\ \ln(x^2+4x+3)=\ln(x+7)$.

ln n'est définit que sur $]0;+\infty[$ donc quel est l'ensemble de définition de cette équation ?

(E) a d'éventuelles solutions $\Leftrightarrow \begin{cases} \dots \\ \dots \end{cases}$

▷ On considère l'inéquation $(I):\ \ln(3x-1)\leqslant 2$, la résoudre.

▷ On considère la fonction N définie sur $[0;+\infty[$ par $N(t)=N_0\mathbf{e}^{-\lambda t}$ où N_0 et λ sont des constantes positives. Déterminer, en fonction de λ, la valeur de t pour laquelle $N(t)=\dfrac{1}{2}N_0$.

▷ Soit $n\in\mathbb{N}$. On pose $p_n=1-\left(\dfrac{5}{8}\right)^n$. Résoudre $p_n\geqslant 0,99$.

III Dérivée de $\ln(u)$ où $u>0$ et dérivable sur I

THÉOREME : Soit u une fonction **dérivable** sur I et pour tout x de I, $u(x)>0$.

La fonction **ln u** est dérivable sur I et, pour tout $x\in I$, $\boxed{(\ln u)'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}}$

Exemple 3 Soit $h:x\longmapsto\ln(4-x^2)$. Sur quel intervalle I, h est-elle dérivable ? Calculer $h'(x)$ pour $x\in I$.

IV Croissance comparée. $n\in\mathbb{N}^*$

- Comparaison de x^n et de $\ln(x)$ en $+\infty$: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^n}=0}$. *A comparer à :* $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathbf{e}^x}{x^n}=+\infty}$ (L4)
- Comparaison de x^n et de $\ln(x)$ en 0 : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}x^n\ln x=0}$. *A comparer à :* $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}x^n\mathbf{e}^x=0}$ (L4)

Exemple 4 Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-\ln x)$ et $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$.