I Expérience aléatoire - modélisation - langage des probabilités

Une expérience aléatoire est une expérience liée au hasard. Les mathématiques interviennent pour apporter un modèle « collant » le mieux possible à la réalité. Ce modèle comporte un **univers** et une **loi de probabilité**. Le choix de ces deux éléments n'est pas unique mais il est généralement induit par une approche fréquentiste et une idée que l'on se fait à priori de l'expérience.

Exemple 1 :
L'expérience consiste à lancer une pièce de monnaie (pile ou face)

- Quelles sont les issues possibles ?
- Quelle probabilité attibue-t-on à chaque issue ?

I.1 Univers

- **Expérience aléatoire** : C'est une expérience qui a plusieurs issues possibles et l'on ne peut pas prévoir avec certitude quel sera le résultat. Elle est liée au hasard.
- **Univers** Ω : C'est l'ensemble de toutes les issues d'une expérience aléatoire.
  on note $\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$
- **Événement** : C'est un résultat composé d'une ou plusieurs issues d'une expérience aléatoire. C'est une partie de l'univers Ω.

Exemple 2 :

- On lance un dé* et on regarde le numéro de la face obtenue :
$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
- On lance un dé* et on regarde si le numéro de la face obtenue est pair ou impair : $\Omega = \{P, I\}$
- On lance une pièce de monnaie* : $\Omega = \{P, F\}$
- On lance deux pièces de monnaie* : $\Omega = \{...........\}$
- On lance deux dés* : $\Omega = \{(i, j),\ 1 \leqslant i, j \leqslant 6\}$

* : équilibré(e)(s) ou pas

I.2 Loi de probabilité

Définir une loi de probabilité P sur Ω, c'est associer à chaque issue x_i un nombre p_i positif ou nul vérifiant $0 \leqslant p_i \leqslant 1$ tel que :

$$p_1 + p_2 + ... + p_n = 1 \text{ où } n \text{ est le nombre d'issues de l'univers.}$$

p_i est appelée probabilité de l'issue x_i et cela se note : $P(x_i) = p_i$.

$$\begin{aligned} P : \Omega &\longrightarrow [0; 1] \\ x_i &\longmapsto P(x_i) = p_i \end{aligned}$$

Exemple 3 : Une urne comporte six boules : 3 rouges, 2 jaunes et 1 bleue. On prélève une boule et on note sa couleur. Quelle loi de probabilité est-il « raisonnable » d'associer à cette expérience ?

I.2.1 Un cas particulier : la loi equirépartie (uniforme)

Lorsque Ω est de **cardinal fini** (nombre d'éléments de Ω fini) et que l'on attribue la même probabilité à chaque issue, on dit que l'on choisit une probabilité P **équirépartie**, on a alors :

- pour toute issue x_i de Ω : $\boxed{P(x_i) = \dfrac{1}{card(\Omega)}}$
- pour tout événement A : $\boxed{P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)} = \dfrac{nombre\, d'\acute{e}l\acute{e}ments\, de\, A}{nombre\, d'\acute{e}l\acute{e}ments\, de\, \Omega}}$

On dit aussi, dans une telle situation qu'il y a **équiprobabilité**.

EXERCICE 1 :
Dans un jeu de 32 cartes, les cartes sont réparties en quatre catégories (coeur, carreau, trèfle, pique). Dans chaque catégorie, il y a huit cartes : As - Roi - Dame - Valet - 10 - 9 - 8 - 7.
On tire une carte au hasard.

1. Quelle est la probabilité de tirer une carte rouge ?
2. Quelle est la probabilité de tirer un roi ?
3. Quelle est la probabilité de tirer une sept noir ?

I.3 Calculs de probabilités

Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire et P une loi de probabilité qui modélise l'expérience.

I.3.1 Probabilité d'un événement

> La probabilité d'un **événement** A est la **somme** de toutes les probabilités des **issues appartenant** à A.

Exemple 4 : On lance un dé truqué tel que la probabilité de réalisation des faces soit proportionnelle au chiffre marqué sur la face.

1. Quelle loi de probabilité P est préconisée dans cette situation ?
2. Calculer la probabilité d'obtenir un chiffre pair.

I.3.2 Événement contraire

> L'événement contraire d'un événement A est composé des issues de l'univers qui ne sont pas dans A. On le note $\overline{A}$.
>
> Sa probabilité se calcule de la manière suivante : $\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$

Exemple 5 :
On lance à nouveau le dé truqué de l'exemple précédent et on relève la face obtenue.
A :« La face obtenue est au moins 2 » . Décrire $\overline{A}$ et calculer sa probabilité. En déduire $P(A)$.

I.3.3 Intersection et réunion d'événements

A et B sont deux événements constitués d'issues d'un univers Ω.

- L'**intersection** de A et de B est l'événement noté $\boxed{A \cap B}$ formé des issues communes à l'événement A **et** à l'événement B.

- La **réunion** de A et de B est l'événement noté $\boxed{A \cup B}$ formé des issues constituant l'événement A **ou** l'événement B.

Exemple 6 On dispose d'une urne à l'intérieur de laquelle il y a 20 boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 20. On tire au hasard une boule. On considère l'événement A : « le numéro de la boule est divisible par 5 » et l'événement B : « le numéro de la boule est un chiffre. » Décrire les événements $A \cap B$ et $A \cup B$. Calculer leur probabilité.

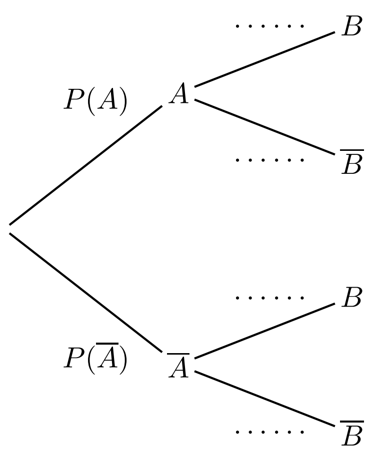
P R O P R I É T É S : Soit A et B deux événements, $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (\bigstar)}$.

Certaines situations conduisent à $P(A \cap B) = 0$, on dit alors que les événements A et B sont **incompatibles** et

$$(\bigstar) \text{ devient } P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

I.4 Arbre de probabilités

A et B deux événements.



Règles et calculs sur un arbre de probabilités :

- À chaque « nœud » figure une issue (ou événement).
- On indique au dessus de chaque branche qui y conduit sa probabilité.
- La somme des probabilités de toutes les branches partant d'un même noeud est égale à 1.
- L'événement intersection est le résultat d'un chemin possible sur l'arbre et sa probabilité est le **produit** des probabilités figurant sur chaque branche parcourue.
- La probabilité de l'événement $B = \left\{A \cap B ; \overline{A} \cap B\right\}$ se calcule en ajoutant les probabilités $P(A \cap B)$ et $P(\overline{A} \cap B)$: on fait donc la somme des produits de probabilités résultant du « passage » sur les chemins conduisant à B : *formule des probabilités totales vue plus loin dans la leçon.*

II Variables aléatoires

Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire et P une loi de probabilité qui modélise l'expérience.

II.1 Notion de variable aléatoire

Une **variable aléatoire discrète** définie sur Ω est une application qui, à chaque issue de Ω, associe un nombre réel. On la note X.

$$\begin{aligned} X : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x_i &\longmapsto X(x_i) = v_i \end{aligned}$$

L'ensemble des valeurs prises par la variable X est noté $X(\Omega) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

Notation : Lorsque x désigne un nombre réel, l'événement « X prend la valeur x » est noté $(X = x)$.

Exemple 7 Un jeu de hasard consiste à lancer un dé équilibré à 6 faces. Le lanceur gagne la somme double de la valeur de la face obtenue si celle-ci est paire, sinon, il perd le double de la valeur indiquée par le dé.
On appelle X le gain, positif ou négatif, du joueur après un lancer.

- ➔ Ici, l'ensemble des issues possibles est $\Omega = \{$ .... $\}$,
- ➔ on a défini avec X une variable aléatoire réelle telle que :
  ....
  .

II.2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $v_1, v_2, \ldots.., v_n$.

Lorsqu'à chaque valeur v_i de $X(\Omega)$ (avec $1 \leq i \leq n$) prise par une variable aléatoire X, on associe la probabilité p_i de l'événement $(X = v_i)$, on dit que l'on définit la **loi de probabilité** de la variable aléaoire X.

Remarque 1 En général, on présente la loi d'une variable aléatoire X sous la forme d'un tableau, qui récapitule les valeurs prises par X ainsi que les probabilités associées :

Valeurs de X : v_i	v_1	v_2	v_3	...	v_n
Probabilité : $p(X = v_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Exemple 8 On reprend l'énoncé de l'exemple précédent. La loi de X est donnée par :

v_i	-10	-6	-2	4	8	12
$p(X = v_i)$						

Remarque 2 On note que pour chacun de ces tableaux, la somme des probabilités élémentaires fait 1
On écrit $\boxed{\sum_{i=1}^{n} p(X = v_i) = 1}$

II.3 Paramètres d'une loi de probabilité

II.3.1 Espérance

Soit X une variable aléatoire de loi :

Valeurs de X : v_i	v_1	v_2	v_3	...	v_n
Probabilité : $p(X = v_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n

On appelle **espérance** de la variable aléatoire X le réel noté $E(X)$ qui vaut :

$$\boxed{E(X) = p_1v_1 + p_2v_2 + ... + p_nv_n = \sum_{i=1}^{n} p_iv_i.}$$

Remarque 3 Ce nombre représente la valeur moyenne de la variable aléatoire X.

- Si $E(X) > 0$, le jeu est **favorable** au joueur ;
- Si $E(X) < 0$, le jeu est **défavorable** ;
- Si $E(X) = 0$, le jeu est **équitable**.

Exemple 9 Avec l'exemple précédent, on trouve

II.3.2 Variance et écart-type

➤ On appelle **variance** de la variable aléatoire X le réel noté $V(X)$ qui vaut :

$$\boxed{V(X) = p_1[v_1 - E(X)]^2 + p_2[v_2 - E(X)]^2 + ... + p_n[v_n - E(X)]^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i[v_i - E(X)]^2.}$$

➤ On appelle **écart-type** de X le réel noté $\sigma(X)$ défini par :

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.}$$

Exemple 10 Calcul de la variance pour l'exemple précédent :

➔ $V(X) =$ ....

➔ $V(X) =$ ....

D'où l'écart-type :

➔ $\sigma_x =$ ....

II.3.3 Propriétés

♦ La variance et l'écart-type d'une variable aléatoire réelle X sont des nombres positifs.

♦ L'écart-type mesure la dispersion des valeurs d'une variable aléatoire par rapport à son espérance.

♦ Si X est exprimé dans un certaine unité, σ_X l'est dans la même unité.

La propriété suivante permet un calcul plus rapide de la variance :

$$\boxed{V(X) = p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + ... + p_nx_n^2 - E^2(X) = \sum_{i=1}^{n}(p_ix_i^2) - E^2(X) = E(X^2) - E^2(X).}$$

Soient a et b deux réels, on a :

$$\boxed{E(aX+b)=aE(X)+b} \qquad \boxed{V(aX+b)=a^2V(X)} \qquad \boxed{\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)}$$

III Probabilités conditionnelles

III.1 Exemple introductif

Un joueur tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes. On considère les événements suivants :

- F="la carte tirée est une figure"
- R="la carte tirée est un roi"

∗ Calculer $p(F)$, $p(R)$ et $p(R\cap F)$

∗ Le joueur affirme : "la carte tirée est une figure". Quelle est alors la probabilité que ce soit un roi ?

On sait que la carte tirée est un roi. Les calculs de probabilités s'en trouvent modifiés. On définit donc une nouvelle probabilité p_F qui sera nulle sur les issues ne correspondant pas à une figure. Pour déterminer la probabilité que la carte soit un roi, nous devons seulement considérer les rois parmi les figures par rapport au nombre total de figures :

On a donc : $p_F(R)=\dfrac{Card(R\cap F)}{Card(F)}=...$

La probabilité $p_F(R)$ s'appelle la probabilité conditionnelle de R sachant F (sous-entendu sachant que F est réalisé : c'est une certitude!!!)

III.2 Probabilité conditionnelle

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω, p une probabilité sur Ω et B un événement tel que $p(B)\neq 0$. On définit une nouvelle probabilité sur Ω, notée p_B, en posant pour tout événement A :

$$p_B(A)=\frac{p(B\cap A)}{p(B)}$$

$p_B(A)$ est parfois notée $p(A|B)$.

Remarque 4 :

- La relation ci-dessus est également uitlisée dans l'autre sens : $p(B\cap A)=p_B(A)p(B)=p_A(B)p(A)$
- L'événement contraire de $(A|B)$ est $(\overline{A}|B)$ (le contraire de A sachant B est $\overline{A}$ sachant B)

EXERCICE 2 Une urne comporte 8 boules : 5 rouges et 3 jaunes. On tire au hasard, successivement et sans remise, deux boules de l'urne. Quelle est la probabilité de tirer une jaune sachant que l'on a tiré une rouge ?

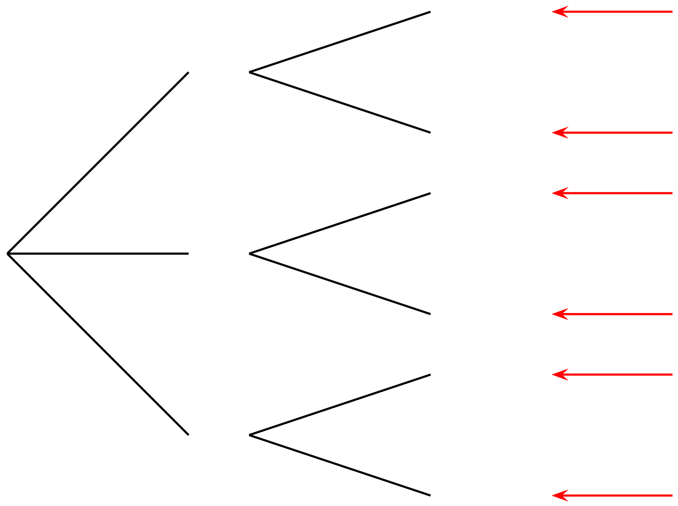
III.2.1 Exemple

On considère trois urnes U_1, U_2 et U_3 contenant des boules rouges ou jaunes.

U_1 : 1 rouge et 5 jaunes ; U_2 : 3 rouges et 1 jaune ; U_3 : 1 rouge et 2 jaunes.

On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans cette urne. Quelle est la probabilité que la boule tirée soit rouge ?

1. Arbre de probabilités



2. Résolution

III.2.2 Formules des probabilités totales

Soit Ω un univers muni d'une probabilité p.
Si des parties $B_1, B_2, ..., B_n$ de probabilités non nulles, constituent une partition de Ω, alors pour tout événement A, on a :

$$p(A) = \sum_{k=0}^{n} p(B_k \cap A) = \sum_{k=0}^{n} p_{B_k}(A)p(B_k) = p_{B_1}(A)p(B_1) + ... + p_{B_n}(A)p(B_n)$$

EXERCICE 3 n^o 36 page 342

IV Indépendance

IV.1 Événements indépendants

On dit que deux événements sont indépendants lorsque :

$$p_A(B) = p(B) \text{ ou encore } p_B(A) = p(A) \text{ ou encore que } p(A \cap B) = p(A)p(B)$$

Remarque 5 :
- La troisième caractérisation de l'indépendance est une conséquence des deux autres.
- Deux événements A et B sont indépendants lorsque la réalisation (ou non) de l'un n'a pas d'influence sur la probabilité de réalisation de l'autre.

EXERCICE 4 On lance une pièce deux fois de suite et on considère les événements A_1 : « FACE au premier lancer » et A_2 : « FACE au second lancer ». Les événements A_1 et A_2 sont-ils indépendants ?

EXERCICE 5 :

On lance n fois un dé. on note A : « on obtient au moins un 6 au cours des n lancers ».

1. Calculer $p(A)$.
2. Comment choisir n pour que la probabilité de A soit supérieure ou égale à 0.95 ?

V Loi Binomiale

V.1 Combinaisons

Soit E un ensemble fini de n éléments et p un entier vérifiant $0 \leqslant p \leqslant n$; on appelle **combinaison de** p **éléments de** E **toute partie de** E **ayant** p **éléments**. (l'ordre n'a aucune importance)
Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble de n éléments est noté $\binom{n}{p}$ (lire « p parmi n »)

Remarque 6 Compléter $\binom{n}{1} = \dots$ puis $\binom{n}{n} = \dots$ et $\binom{n}{0} = \dots$

V.2 Dénombrer les combinaisons

Pour n et p entiers tels que $0 \leqslant p \leqslant n$, on a :

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)...(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exemple 11 Au loto, combien y a-t-il de tirages de 5 numéros parmi 49 ?

Exemple 12 Dans un jeu de 32 cartes, on choisit 5 cartes au hasard (ces cartes s'appellent une « main »).

1. Combien de mains contiennent exactement 2 dames et 1 roi ?
2. Combien de mains contiennent au moins 3 rois ? (c'est à dire 3 rois ou 4 rois)

V.3 Propriétés des coefficients binomiaux

* Pour tous entiers n et p tels que $0 \leqslant p \leqslant n$, on a : $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
* Pour tous entiers n et p tels que $1 \leqslant p \leqslant n-1$, on a : $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$ (relation de Pascal)

V.4 Loi Binomiale

Une épreuve de Bernoulli est une épreuve aléatoire ayant deux issues contraires de probabilités respectives p et q, avec $p+q=1$ (ainsi $q=1-p$)

Exemple 13 :

* Lancer d'une pièce équilibrée avec pour issues contraires PILE ($p=0.5$) et FACE ($q=0.5$)
* Tirage d'une boule dans une urne contenant 70 boules blanches et 30 boules vertes $\to S$: « tirer une boule blanche » ($p=0.7$) et $E=\overline{S}$: « tirer une boule verte » ($q=0.3$)

Remarque 7 : L'événement de probabilité p est souvent nommé S pour succès et celui de probabilité $q=1-p$ est nommé E pour échec.

Certaines situations en probabilité consistent en la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (schéma de Bernoulli). La variable aléatoire X à valeurs dans $\{0, 1, ..., n\}$ qui compte le « nombre de succès » (nombre de fois que S se réalise) suit **la loi binomiale de paramètres n et p**.

Remarque 8 : La loi binomiale de paramètres n et p est notée $\mathcal{B}(n,p)$.
La répétition des n épreuves de Bernoulli peut être décalée dans le temps ou simultanée dés que les événements sont indépendants.

: Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

- Pour $k=0, 1, ..., n$, la probabilité de l'événement $(X=k)$ est $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.
- L'espérance et la variance de X sont $E(X)=np$ et $V(X)=npq$.

Remarque 9 : La probabilité **d'obtenir au moins un succès** est calculée par :
$p(X \geqslant 1)$ soit $1-p(X=0)=1-q^n$ (à rapprocher d'exercices déjà vus dans la leçon 6)

Exemple 14 Un Q.C.M comporte 10 questions offrant chacune 3 réponses possibles. On répond complétement au hasard. Quelles sont les probabilités :

* d'obtenir 2 réponses exactes ?
* d'avoir la "moyenne" (5 réponses ou plus exactes) ?

Exemple 15 Sujet de BAC : Amérique du Nord juin 2016