I Introduction

Un noyau radioactif, instable, se désintègre (c'est à dre qu'il se transforme spontanément après une durée indéterminée en un noyau plus stable). S'il est impossible de prévoir la date de désintégration d'un noyau donné, on constate cependant en considérant à un instant t un échantillon macroscopique d'un grand nombre de noyaux, que la variation du nombre de ces noyaux par seconde est proportionnelle au nombre de noyaux présents à l'instant t dans l'échantillon.

On appelle N_0 le nombre initial de noyaux et $N(t)$ le nombre de noyaux restants (non désintégrés) à l'instant t.

Supposons que l'expérience commence à un instant t alors, pour tout $h > 0$, $N(t+h)$ est le nombre de noyaux présents à la date $t+h$.

On note Δt la variation du temps entre les dates t et $t+h$, on a donc $\Delta t = (t+h) - t = h$.

La variation du nombre de noyaux entre les dates t et $t+h$ est donc $N(t+h) - N(t)$ que l'on nomme ΔN.

La variation du nombre de noyaux par seconde est proportionnelle au nombre d'atomes présent au début de l'expérience et à la variation de temps entre les deux dates. Cela signifie qu'il existe un réel k tel que

$$\Delta N = kN(t)\Delta t \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\Delta N}{\Delta t} = kN(t) \quad (1)$$

Remarque 1 $\Delta N < 0$ car $N(t+h) - N(t) < 0$ donc $k < 0$.
Les physiciens préférant travailler avec des constantes positives, on pose $k = -\lambda$ avec $\lambda > 0$. λ est appelée constante de désintégration radioactive, elle est caractéristique de noyau considéré.
Par exemple, pour le Radium 226, elle vaut environ $1,37 \times 10^{-11}$ (en s^{-1}).

En exprimant $\dfrac{\Delta N}{\Delta t}$ on trouve ...., ce qui nous fait penser au ....

de la fonction N. Si l'expérience dure un temps extrêmement court, cela se traduit par une valeur de h proche de 0. Il est donc « naturel » de s'intéresser à

$$\lim_{h \to 0} \frac{N(t+h) - N(t)}{h} \underset{hyp: N \text{ dérivable}}{=} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ et donc } (1) \Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ceci signifie que N est une fonction proportionnelle à sa dérivée. Pour déterminer N, il faut donc savoir résoudre une équation mettant en jeu une fonction et sa dérivée. Une équation où l'inconnue est ....
On note cette équation

$$\boxed{y' = -\lambda y} \text{ et la fonction } N \text{ (vérifiant } N(0) = N_0\text{) en est la solution.}$$

• ○ •

Dans cette leçon, l'enjeu sera le suivant : Existe-t-il une fonction f **dérivable sur** $\mathbb{R}$ vérifiant

$$(E_d)\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases} ?$$

Pour conclure, on donnera ensuite une expression possible de la fonction N de l'introduction.

II Une fonction égale à sa dérivée

II.1 Propriétés vérifiées par une solution de (E_d)

ADMIS : Il existe une fonction f solution de (E_d). *(ce qui donne une raison de la chercher)*
Pour les courageux ou les « amoureux des maths », voir une preuve de l'existence d'une telle fonction :

Lien vers l'existence

II.1.1 La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

II.1.2 La fonction f vérifie la relation fonctionnelle $f(x+a) = f(x)f(a)$, $\forall(x, a) \in \mathbb{R}^2$

Trame de la démonstration

Soit a un nombre réel fixé (constante). On pose $k(x) = f(x+a)f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

1. Montrer que k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $k'(x)$.
2. Calculer $k(0)$. En déduire que, pour tous x et a réels :

$$f(x+a)f(-x) = f(a) \quad (2)$$

3. Déduire de (2) les résultats suivants :
   (a) $f(x)f(-x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;
   (b) la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$;
   (c) $f(x+a) = f(x)f(a)$, $\forall(x, a) \in \mathbb{R}^2$

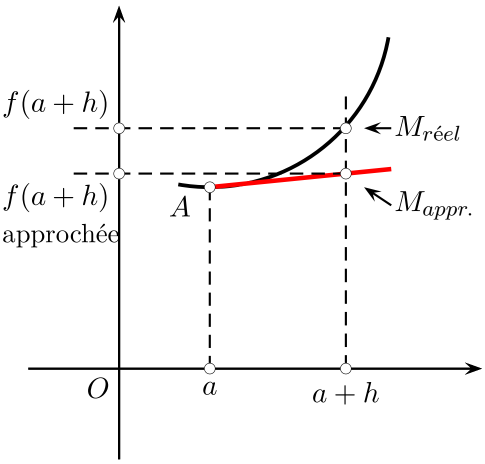
II.1.3 La fonction f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

II.1.4 Unicité de la fonction f

Comme souvent en mathématiques, pour démontrer l'unicité d'un objet mathématique, on suppose qu'il y en a deux.
Supposons qu'il existe deux fonctions f_1 et f_2 dérivables sur $\mathbb{R}$, solutions de (E_d).

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $m(x) = f_1(x)f_2(-x)$.

II.1.5 Courbe de la fonction f



En A est tracé la tangente à $\mathcal{C}_f$ d'équation : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $a+h$ est le point $M_{réel}$ et il est « interpolé » par le point $M_{appr.}$ de la tangente ayant la même abscisse.

Grâce à la méthode d'Euler qui s'appuie sur l'approximation affine d'une fonction dérivable en a.

$$f(x) \approx f'(a)(x-a) + f(a) \text{ pour } x \text{ voisin de } a.$$

On peut calculer, avec une précision mesurée, les images par la fonction f et construire une courbe « *approchée* ».

ACTIVITÉ de construction de la courbe de la fonction f vérifiant le système différentiel (E_d) : Lien vers l'activité

III La fonction Exponentielle

III.1 Théorème et Définition

Il existe une **unique** fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. On l'appelle **exponentielle** et elle est notée $\exp$.

Conséquences :

- $\exp(0) = 1$;
- exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp'(x) = \exp(x)$;
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$;
- exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Théorème démontré dans II.1.2

Pour tous réels a et b : $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$

• ◯ •

Corollaire

Pour tous réels a et b et pour tout entier relatif n :

- $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$;
- $\exp(na) = [\exp(a)]^n$;
- $\exp(-b) = \dfrac{1}{\exp(b)}$;
- $\exp(\frac{a}{n}) = \sqrt[n]{\exp(a)}$, $(n \geqslant 1)$.

III.2 Nombre e et notation e^x

Le nombre $\exp(1)$ **est noté** $\boxed{\mathbf{e}}$. La calculatrice nous donne : $\mathbf{e} \approx 2,718281828$.

Avec $a = 1$ dans $\exp(na) = [\exp(a)]^n$, on obtient : $\exp(n) = ...$

On décide de prolonger à tout x réel, l'égalité obtenue sur les entiers et on pose, par convention :

$$\exp(x) = \mathbf{e}^x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Reformuler les propriétés et constater qu'elles correspondent à l'usage d'une notation puissance.

Remarque 2 Comme tout nombre réel, le nombre **e** est limite d'une suite de nombres rationnels, il est important de savoir que

$$\mathbf{e} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

III.3 Propriétés asymptotiques : limites en l'infini

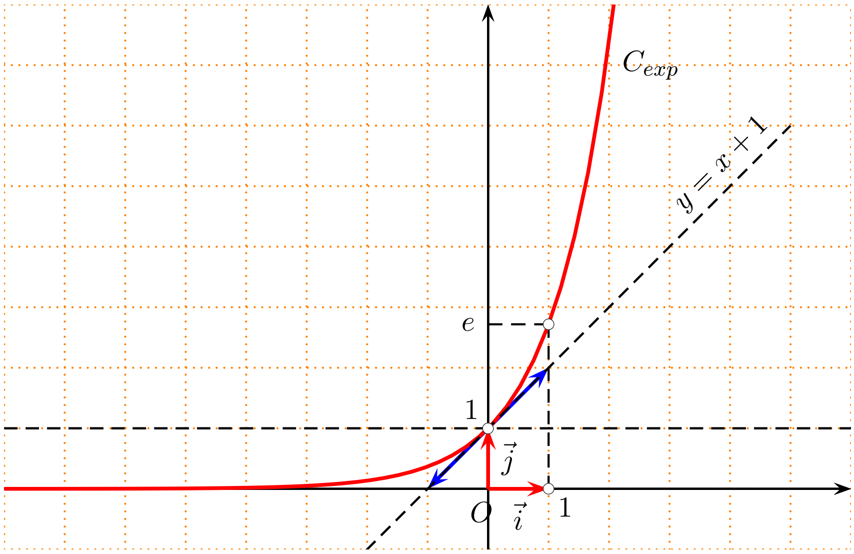
Limites en l'infini :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \mathbf{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathbf{e}^x = 0$; une limite de référence : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathbf{e}^x}{x} = +\infty$

La courbe $\mathcal{C}_{exp}$ admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en $-\infty$.

Démonstations : On pose $\varphi(x) = \mathbf{e}^x - x$ 　　 *idées* : $y = -x$ et $\frac{x}{2}$

III.4 Courbe de la fonction exp



Équations des tangentes aux points de $\mathcal{C}_{exp}$ d'abscisses 0 et 1 :

Propriétés

- $\boxed{\mathbf{e}^x = \mathbf{e}^y \Leftrightarrow x = y}$, **démo** : *La fonction exponentielle et continue et strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *donc c'est une bijection de* $\mathbb{R}$ *sur* $]0; +\infty[$ *: Tout nombre réel strictement positif a un unique antécédent par* exp.

- Cas particulier : $\boxed{\mathbf{e}^x = 1 \Leftrightarrow x = 0}$, **démo** : $y = 0$ *dans la propriété précédente.*

- Pour $x, y \in \mathbb{R}$, $\boxed{\mathbf{e}^x < \mathbf{e}^y \Leftrightarrow x < y}$, **démo** : exp *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$

- Cas particulier : $\boxed{0 < \mathbf{e}^x < 1 \Leftrightarrow x < 0}$, **démo** : $y = 0$ *dans la propriété précédente et* $\mathbf{e}^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

- Cas particulier : $\boxed{\mathbf{e}^x > 1 \Leftrightarrow x > 0}$, **démo** : *Encore le sens de variation.*

Remarque 3 Ces propriétés seront très utiles pour trouver les signes d'expressions comportant des exponentielles : notamment les signes de dérivées dans les études de fonctions.
Utilisées également dans la résolution d'équations et d'inéquations.

Exemple 1 Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

* $\mathbf{e}^{3x-1} = 1 \Leftrightarrow \ldots$

* $\mathbf{e}^{x^2-x} = \mathbf{e} \Leftrightarrow \ldots$

* $\mathbf{e}^{3-4x} < \dfrac{1}{\mathbf{e}} \Leftrightarrow \ldots$

* $\mathbf{e}^{5-x^2} \geqslant \mathbf{e}^{4x} \Leftrightarrow \ldots$

• ○ •

Exemple 2 Déterminer le signe de $\mathbf{e}^{x^2} - \mathbf{e}^x$ lorsque $x \in \mathbb{R}$.

III.5 Croissance comparée. Limites de référence

Limites à connaître :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathbf{e}^x}{x^n} = +\infty} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x\to-\infty} x^n\mathbf{e}^x = 0}$$

Traduction possible : **A l'infini, l'exponentielle de x l'emporte sur toute puissance de x.**

EXERCICE 1 Calculer les limites suivantes :

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathbf{e}^{2x+1}}{x}$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{6+2\mathbf{e}^{-x}}$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathbf{e}^{x}}{\sqrt{x}}$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x+3}{\mathbf{e}^{x}+1}$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathbf{e}^{x}+x}{3-2\mathbf{e}^{x}}$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathbf{e}^{x}}{x^2-2x-1}$
- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-3x-1}{\mathbf{e}^{x}}$
- $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\mathbf{e}^{x}-1}{x}$

III.6 Fonction dérivée de $\mathbf{e}^u$ avec u dérivable sur un intervalle I

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I . La fonction $\mathbf{e}^u$, est dérivable sur l'intervalle I et on a :

$$\boxed{(\mathbf{e}^u)' = u' \times \mathbf{e}^u}$$

Dans le cas où la fonction u est affine,

la dérivée de $\boxed{x \mapsto \mathbf{e}^{ax+b}}$ est la fonction $x \mapsto \ldots\ldots$

La démontration s'obtient par la dérivation de fonctions composées et le fait que $(\exp)' = \exp$.

Exemple 3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathbf{e}^{1-x^2}$.
Calculer $f'(x)$ et déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 2 Associer chaque courbe à sa fonction : $f_1 : x \longmapsto \mathbf{e}^{-x^2}$; $f_2 : x \longmapsto \mathbf{e}^{-\frac{1}{x}}$; $f_3 : x \longmapsto \mathbf{e}^{-x}$.