I L'ensemble $\mathbb{C}$

I.1 Un nouvel ensemble de nombres

Théorème :
Il existe un ensemble $\mathbb{C}$ (ensemble des nombres complexes) contenant $\mathbb{R}$ et vérifiant :
- $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$ et suivent les mêmes règles de calcul.
- Il existe un élément i de $\mathbb{C}$ tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.
- Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique : $z = a + \mathrm{i}b$ (a et b réels)

I.2 Un vocabulaire spécifique

Si un nombre complexe s'écrit de manière unique $z = a + ib$ avec a, b réels alors :

- $a + ib$ s'appelle l'écriture algébrique de z ;
- a est la **partie réelle** de z ; on note $a = \mathbf{Re(z)}$;
- b est la **partie imaginaire** de z, notée $b = \mathbf{Im(z)}$;
- $\mathbf{Re(z)}$ et $\mathbf{Im(z)}$ sont **des nombres réels** ;

- Si $b = 0$ alors $\boxed{z = a}$ et $z \in \mathbb{R}$ (on retrouve le fait que $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$). On dit alors que z **est réel** ;
- Si $a = 0$ alors $\boxed{z = ib}$, on dit alors que z est **imaginaire pur**.

• ○ •

EXERCICE 1 Soit $x \in \mathbb{R}$ et z le nombre complexe défini par :

$$z = x + 2 + \mathrm{i}(x - \mathrm{i}x) + 2\mathrm{i} - 5\mathrm{i}x$$

1. À quelle condition portant sur x, z est-il réel ?
2. À quelle condition z est-il imaginaire pur ?

• ○ •

I.3 Égalité de deux nombres complexes

a, b, a', b' sont des nombres réels quelconques.

$$\boxed{z = z' \Leftrightarrow a + \mathrm{i}b = a' + \mathrm{i}b' \Leftrightarrow a = a' \text{ et } b = b'}$$

En particulier : $a + \mathrm{i}b = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$.

I.4 Somme et produit de deux nombres complexes

On utilise les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$ en tenant compte du fait que $\mathrm{i}^2 = -1$
Voir exemples dans l'activité de découverte.

Exemple 1 Donner l'écriture algébrique de $z_1 = (2\mathrm{i} - 1)(3 + 4\mathrm{i}) - 4\mathrm{i}(3 - 2\mathrm{i})^2$
et de $z_2 = (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y)$ (avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$)

I.5 Quotient de nombres complexes

Comme tout nombre complexe peut s'écrire sous la forme $a+ib$:

- $\dfrac{1}{3-4\mathrm{i}}=\dfrac{1}{3-4\mathrm{i}}\times\dfrac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}=\dfrac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}=\dots\dots\dots$

- $\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\times\dfrac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}=\dfrac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}=\dfrac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}=\dots\dots\dots$

Remarque 1 Cette technique est à connaître.

EXERCICE 2 Calculer $(a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b)$
En déduire la valeur du produit suivant : $(a+\mathrm{i}b)(\dfrac{a}{a^2+b^2}-\mathrm{i}\dfrac{b}{a^2+b^2})$ et l'inverse de $a+ib$.

I.6 Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

Les techniques utilisées dans $\mathbb{R}$ sont transposables donc :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ $3z+6\mathrm{i}=z-2$	Résoudre dans $\mathbb{C}$ $\dfrac{-\mathrm{i}}{z+1}=2$	1. Montrer que, pour tout $z\in\mathbb{C}$, $z^2-6z+25=(z-3)^2+16$ 2. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2-6z+25=0$

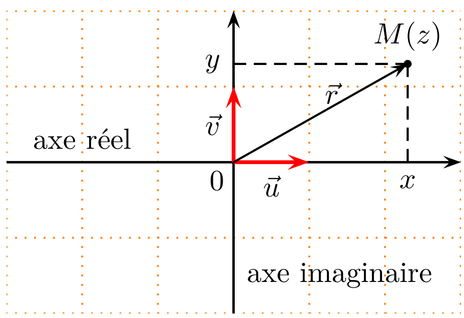
II Le plan complexe

Le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ est appelé **plan complexe**.

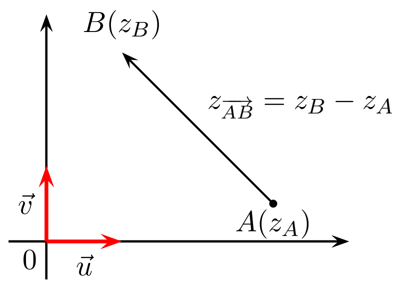
II.1 Affixe d'un point

- Soit $z=x+\mathrm{i}y$ un nombre complexe, le point M de coordonnées (x,y) est **l'image** de z noté $M(z)$.

- Si le point M a pour coordonnées (x,y), on lui associe le nombre complexe $z=x+\mathrm{i}y$ appelé **affixe** de M et noté z_M.

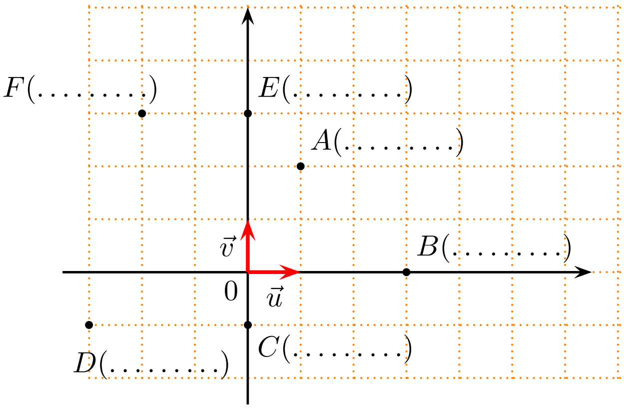


II.2 Affixe d'un vecteur



- si $\vec{r}=x\vec{u}+y\vec{v}$, on note $z_{\vec{r}}=x+\mathrm{i}y$
- Pour tout point A : $z_{\overrightarrow{OA}}=z_A$
- Quels que soient les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{s}$ et le réel λ : $z_{\vec{r}+\vec{s}}=z_{\vec{r}}+z_{\vec{s}}$ et $z_{\lambda\vec{r}}=\lambda z_{\vec{r}}$
- Pour tous points A et B : $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A$
- I milieu de $[AB]$ $\Leftrightarrow$ $z_I=\dfrac{z_B+z_A}{2}$
- Deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes affixes

EXERCICE 3 :



Dans le plan complexe, on donne les points A, B, C, D, E et F.
Compléter les affixes des points sur la figure.
Déterminer les affixes des vecteurs

$$\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{OF},\ \overrightarrow{CD},\ \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}, -3\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB},$$

puis celle du milieu I de $[DC]$.

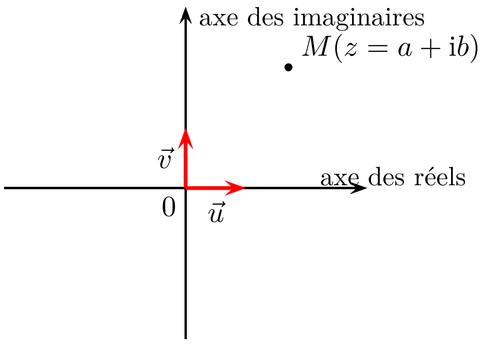
III Conjugué d'un nombre complexe

Définition : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe (a et b réels).

On appelle **conjugué** de z le nombre complexe $\overline{z} = a - ib$ *(il faut lire « z barre »)*

Exemple 2 Quels sont les conjugués des nombres complexes : $1 - 5\mathrm{i}$, -3 et $-\mathrm{i}$?

Remarque 2 :



Soit $z \in \mathbb{C}$ et M son point image dans le plan complexe.

Placer les trois points images des nombres complexes $\overline{z}$, $-z$ et $-\overline{z}$.

Propriétés liées à la conjugaison

* z **réel** $\Leftrightarrow$ $\mathbf{z = \overline{z}}$;
* z **imaginaire pur** $\Leftrightarrow$ $\mathbf{z = -\overline{z}}$;
* Pour tout nombre z complexe, $\mathbf{z = \overline{\overline{z}}}$.
* Pour tous nombres complexes z et z', et tout entier n :
  - $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{-z} = -\overline{z}$; $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$; $\overline{z^n} = \overline{z}^n$;
  - $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$ et $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
* $\forall z \in \mathbb{C}$, $\mathbf{z + \overline{z} = 2Re(z)}$
* $\forall z \in \mathbb{C}$, $\mathbf{z - \overline{z} = 2iIm(z)}$
* $\forall z \in \mathbb{C}$, $z = a + \mathrm{i}b$. $\mathbf{z\overline{z}}$ est **réel** et $\mathbf{z\overline{z} = a^2 + b^2}$

EXERCICE 4 Déterminer les conjugués des nombres complexes suivants :

$$z_1 = (2-\mathrm{i})(\mathrm{i}-5) \text{ et } z_2 = \frac{3+2\mathrm{i}}{3\mathrm{i}}$$

EXERCICE 5 Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tels que $z^2 - \overline{z}$ soit réel.

EXERCICE 6 *Équation « mélangeant » z et $\overline{z}$.*
Résoudre les deux équations suivantes : $2z + \mathrm{i} = \overline{z} + 1$ et $z^2 = \overline{z}$

IV Équations du second degré

IV.1 Racines carrées d'un réel

L'équation $z^2 = a$ où a est un réel quelconque admet toujours des solutions :

- Si $a \geq 0$, l'équation $z^2 = a$ admet deux solutions **réelles opposées** $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$;
- Si $a \leq 0$, l'équation $z^2 = a$ admet deux solutions **imaginaires conjuguées** $\mathrm{i}\sqrt{-a}$ et $-\mathrm{i}\sqrt{-a}$.

Exemple 3 Quelles sont les solutions de l'équation $z^2 = -8$?

IV.2 Équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $(a, b$ et c réels ; $a \neq 0)$

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $(a, betc$ réels ; $a \neq 0)$ admet des solutions dans $\mathbb{C}$.
On note également $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation.

- Si $\Delta = 0$, une solution unique : $x = -\dfrac{b}{2a}$ (réel)
- Si $\Delta > 0$, deux solutions réelles : $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$;
- Si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées : $x = \dfrac{-b \pm ß\sqrt{-\Delta}}{2a}$;

Exemple 4 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^2 + x + 1 = 0$.

EXERCICE 7 :
Pour tout nombre complexe z, on pose :

$$P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$$

1. Calculer $P(-1)$.
2. Déterminer les réels a et b tels que pour tout nombre complexe z, on ait :
$$P(z) = (z+1)(z^2 + az + b)$$
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.