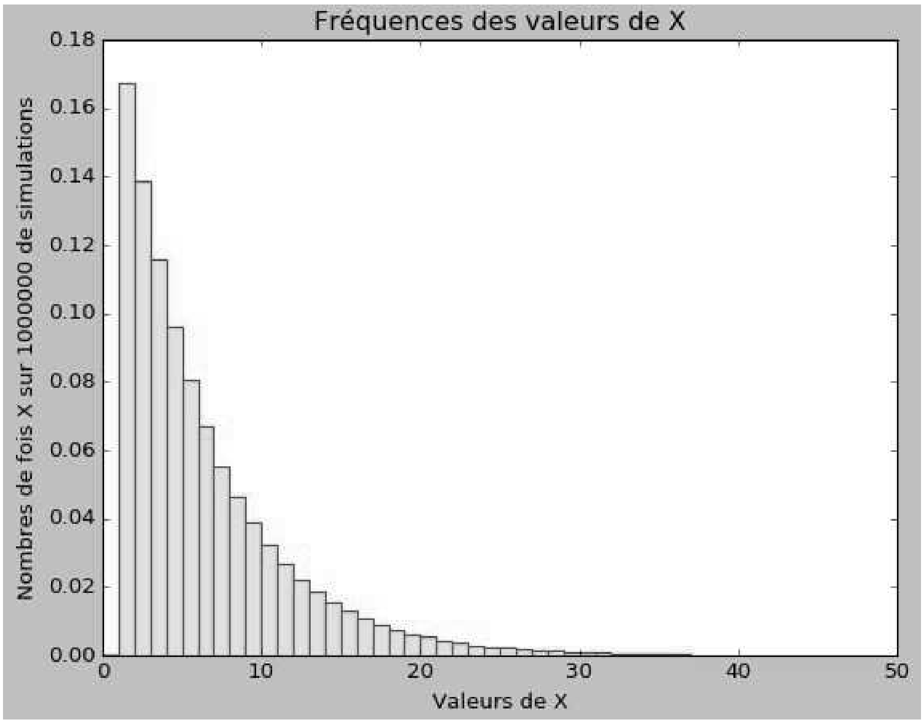
I Vers les lois continues, analyse d'une situation concrète

`Expérience : On lance un dé équilibré jusqu'à ce qu'il tombe sur la face 6.`
`Soit` X `la variable aléatoire correspondant au nombre d'étapes pour que le dé tombe sur 6 pour la première fois.`

1. X peut-il être égal à 10 ? à 20 ? Comment décririez-vous $X(\Omega)$ correspondant aux valeurs possibles prises par la variable X ?
2. Soit k un entier naturel. Décrire par une phrase l'événement $(X = k)$.
3. Pour tout entier naturel k, donner l'expression de la probabilité de l'événement $(X = k)$.
4. `Simulation : On simule un grand nombre de lancers du dé (1 million de fois) et on trace l'histogramme des fréquences observées des valeurs de` X



5. On a d'autre part tracé une courbe qui « approxime » cet histogramme. À quel type de courbe fait penser cete courbe ? On fait l'hypothèse que la courbe est celle d'une fonction définie par

$$f : x \mapsto \lambda \mathbf{e}^{-\lambda x} \text{ où } \lambda \text{ est un nombre réel.}$$

`Déterminer à l'aide du graphique une valeur approchée de` λ `et calculer une valeur approchée de la probabilité que le nombre d'étapes pour obtenir 6 soit compris entre 5 et 10. (dessin)`

I.1 Notion de densité de probabilité

Définition : Dans le cas d'une variable aléatoire continue (la variable prend une infinité de valeurs), l'histogramme des fréquences est remplacé par une courbe $(\mathcal{C})$ représentative d'une fonction f possédant les trois propriétés suivantes :

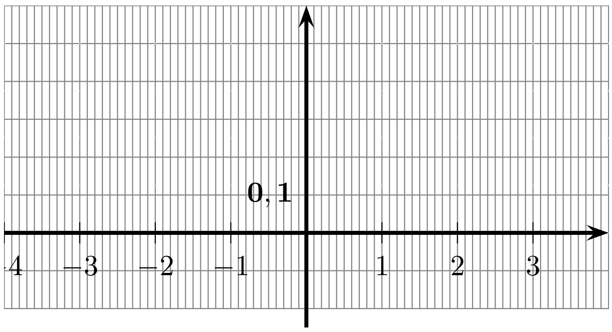
- f est **positive** sur $\mathbb{R}$;
- f est **continue** par morceaux sur $\mathbb{R}$; (avec éventuellement des points de discontinuité)
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

La fonction f est la **densité de probabilité** de la variable aléatoire X.

Remarque 1 Le troisième point mérite une explication à cause des bornes infinies de l'intégrale. Il faut comprendre,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{y\to-\infty}\int_{y}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t + \lim_{x\to+\infty}\int_{b}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ \textit{(a et b dépendant de la fonction de densité)}}$$

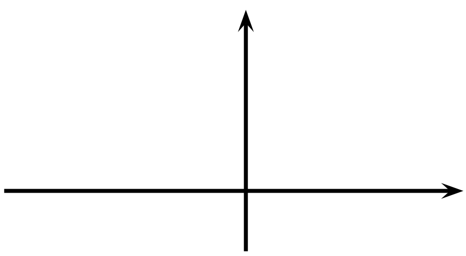
Vérifier que la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x} \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases}$ définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction de densité associée à une variable aléatoire.



I.2 Loi de probabilité associée à une fonction de densité

Soit f une fonction densité de probabilité associée à une variable aléatoire X définie sur $\mathbb{R}$.
On définie une loi de probabilité p de la manière suivante :

- $p(X \in [a;b]) = \displaystyle\int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ (a<b)
- $p(X \in [a;+\infty[) = \displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ (comprendre $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_{a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$)



Remarque 2 :

1. L'événement $(X \in [a;b])$ se note aussi $(a \leqslant X \leqslant b)$.
   Ainsi, on écrira indifféremment $p(X \in [a;b])$, $p(a \leqslant X \leqslant b)$.

2. L'événement $(X \in [a;+\infty[)$ se note aussi $(X \geqslant a)$.
   Ainsi, on écrira indifféremment $p(X \in [a;+\infty[)$, $p(X \geqslant a)$.
   On notera que $p(X \geqslant a) = 1 - p(X < a)$ car $(X \geqslant a)$ et $(X < a)$ sont des événements contraires.

3. $\forall a \in \mathbb{R}$, $p(X = a) = 0$. En loi continue, la probabilité « ponctuelle » est nulle.

4. $p(X \geqslant a) = p(X > a)$.

Exemple 1 :
On admet que la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$ est une densité de probabilité.
Calculer $p(0 \leqslant X \leqslant 5])$ et $p(X > 5)$.

I.3 Espérance d'une variable aléatoire continue

Une variable aléatoire X suit une loi de probabilité continue sur $\mathbb{R}$.
L'espérance mathématique de X est donnée par la formule : $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$.
La variable aléatoire admet une espérance si l'intégrale « existe » (intégrale convergente). Ce sera toujours le cas au lycée.

Remarque 3 L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente signifie que

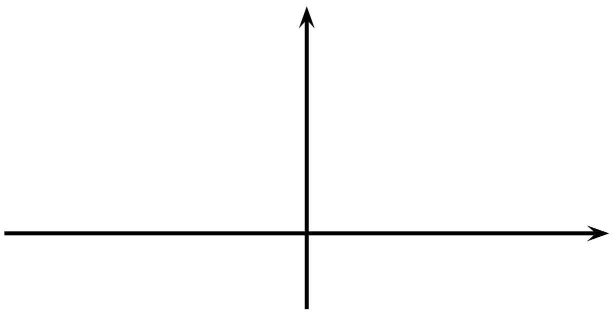
$$\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{y \to -\infty} \int_{y}^{a} tf(t)\,\mathrm{d}t + \int_{a}^{b} tf(t)\,\mathrm{d}t + \lim_{x \to +\infty} \int_{b}^{x} tf(t)\,\mathrm{d}t = L \text{ } (L \text{ nombre réel})$$

II Exemples de lois continues

II.1 Loi uniforme sur $[a;b]$

Définition : Une variable aléatoire X suit une loi continue uniforme sur $[a;b]$ $(a \neq b)$ si, et seulement si, X a pour densité de probabilité la fonction f définie par :

$$\begin{cases} \forall t \in [a;b],\ f(t) = \dfrac{1}{b-a} & \texttt{fonction constante} \\ \forall t \in \mathbb{R} - [a;b],\ f(t) = 0 \end{cases}$$



EXERCICE 1 Calculer l'espérance mathématique d'une variable aléatoire X qui suit une loi uniforme sur $[a;b]$.

Si $a \leqslant c \leqslant d \leqslant b$, Calculer $p(X \in [c;d])$.

Exemple 2 Le choix d'un nombre dans un intervalle $[a;b]$ est modélisé par la loi uniforme sur $[a;b]$. Si l'on considère par exemple, la loi uniforme sur $[0;1]$. On note X la variable aléatoire égale au choix du nombre.

- Quelle est la probabilité de choisir le nombre 0.234 ?
- Comparer $p([0.25;0.4])$ et $p([0.751;0.901])$.
- Quelle est la probabilité que l'événement $(\sqrt{X} \geqslant 0.5)$ soit réalisé ?

Remarque 4 Au deuxième point, on trouve comme probabilités la longueur des intervalles car la loi uniforme est considérée sur $[0;1]$. Que se passe t-il sur $[0;2]$?

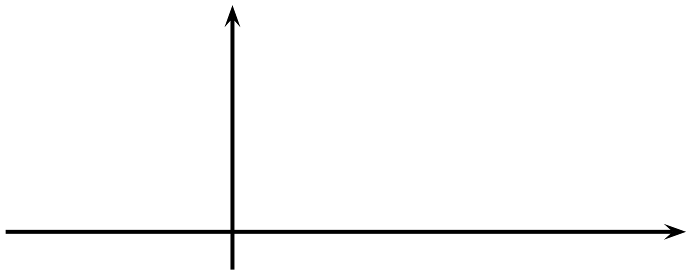
EXERCICE 2 On considère que le temps d'attente T à un guichet, en minutes, est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0;20]$.

1. Déterminer la probabilité qu'une personne arrivant au guichet attende entre cinq minutes et un quart d'heure à ce guichet.
2. Déterminer la probabilité qu'une personne attende plus d'un quart d'heure à ce guichet.
3. Déterminer le temps d'attente moyen que peut espérer une personne arrivant à ce guichet.

II.2 Loi exponentielle ou loi de durée de vie sans vieillissement

Définition : Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$) sur $[0;+\infty[$ si, et seulement si, X a pour densité de probabilité la fonction f définie par :

$$\begin{cases} \forall t \in [0;+\infty[, \ f(t) = \lambda \mathbf{e}^{-\lambda t} \\ \forall t \in]-\infty;0[, \ f(t) = 0 \end{cases}$$



EXERCICE 3 Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ sur $[0;+\infty[$. Répondre aux questions suivantes :

- $[c;d]$ est inclus dans $[0;+\infty[$. Calculer $p(X \in [c;d])$.

- $a > 0$. Calculer $p(X < a)$.

- Calculer $p(]a;+\infty[)$.

Propriété : Soit T une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ

$$\text{Pout tous réels positifs } t \text{ et } h, \ p_{(T \geqslant t)}(T \geqslant t+h) = p(T \geqslant h).$$

Démonstration

Commentaires importants

Propriété : L'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ vaut $\dfrac{1}{\lambda}$.

Démonstration : Chercher une primitive de $t \longmapsto \lambda t \mathbf{e}^{-\lambda t}$ sous la forme $F(t) = (mt+n)\mathbf{e}^{-\lambda t}$.

EXERCICE 4 Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
Déterminer λ sachant que
$p(1 \leqslant X \leqslant 2) = \frac{1}{4}$.
En déduire la valeur de $p(X > 1)$.

EXERCICE 5 Le temps d'attente, en secondes, à la caisse d'un magasin est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ.

1. Sachant que la probabilité d'attendre moins de 3 minutes à la caisse est de 0,835, déterminer la valeur de λ à 10^{-2} près.
2. En déduire la probabilité d'attendre moins d'une minute à la caisse.
3. Quel est le temps moyen d'atente à cette caisse ?

II.3 Lois normales

II.3.1 Loi normale centrée réduite

1. **Une nouvelle densité de probabilité sur $\mathbb{R}$**

PROPRIÉTÉ : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t^2/2}$$

est continue, positive sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$. (au sens vu dans la remarque 1.)
f est donc une fonction densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

2. **La loi $\mathcal{N}(0;1)$**

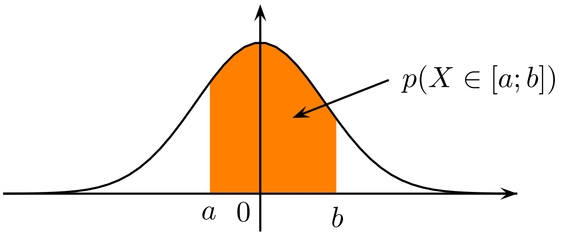
DÉFINITION : La loi de probabilité ayant pour densité de probabilité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t^2/2}$$

s'appelle **la loi normale centrée réduite**, notée $\mathcal{N}(\mathbf{0};\mathbf{1})$.

Dire que X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$, signifie que pour tous réels a et b tels que $a < b$, on a :

$$p(X \in [a;b]) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t.$$



3. **Paramètres de la loi $\mathcal{N}(0;1)$**

$\longrightarrow$ ESPÉRANCE : On rappelle que $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$.

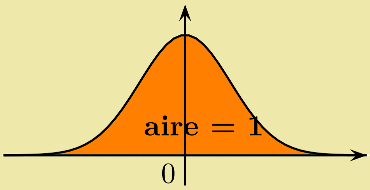
En pratique, on calcule dans le cas d'une $\mathcal{N}(0;1)$, $\displaystyle\int_{-x}^{x} \frac{t}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$ ($x > 0$) et l'on fait tendre x vers $+\infty$.

$\longrightarrow$ VARIANCE : On admet que $\boxed{\text{si } X \text{ suit une } \mathcal{N}(0;1) \text{ alors } V(X) = 1 \text{ et donc } \sigma(X) = 1}$

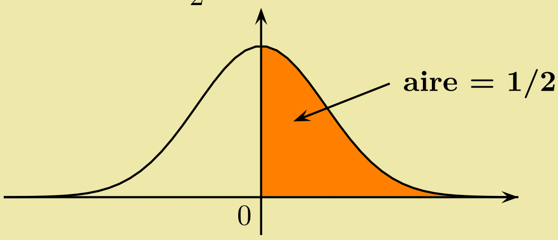
4. **Propriétés**

PROPRIÉTÉS : Soit f définie sur $\mathbb{R}$, la fonction densite de $\mathcal{N}(0;1)$

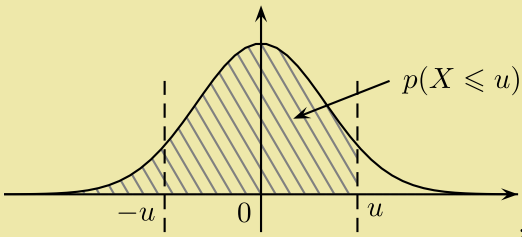
- L'aire totale sous la courbe de f est égale à 1 : elle représente $p(X \in]-\infty;+\infty[)$.



- La fonction f est paire donc C_f symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- L'aire sous la courbe sur $[0;+\infty[$ est égale à $\dfrac{1}{2}$.



- Pour tout réel u, $\boxed{p(X \leqslant -u) = p(X \geqslant u) = 1 - p(X \leqslant u)}$



,

,

5. **Calcul de probabilités**

On ne connaît pas de primitive explicite de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathbf{e}^{-t^2/2}$. On utilisera donc la calculatrice pour obtenir des estimations des résultats (voir document calculatrices)

EXERCICE 6 X suit une loi normale $\mathcal{N}(0;1)$.

(a) Déterminer une valeur approchée de $p(X \leqslant 0,59)$.

(b) Déterminer une valeur approchée de $p(0,1 \leqslant X \leqslant 0,2)$.

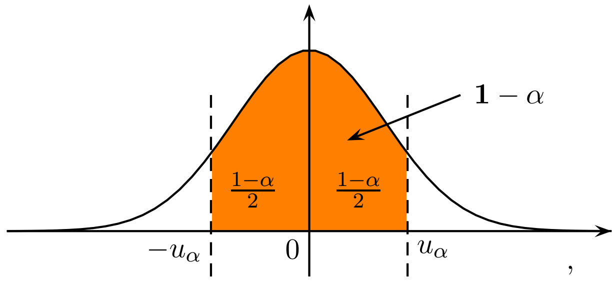
(c) Déterminer une valeur approchée de $p(X > 0,4)$.

6. **Nombre u_α**

THÉORÈME : Soit X une variable aléatoire suivant une $\mathcal{N}(0;1)$, $\forall\alpha \in [0;1]$, il existe un unique nombre u_α tel que

$$p(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$$

$\forall u > 0,\ p(-u \leqslant X \leqslant u) = \dots\dots$



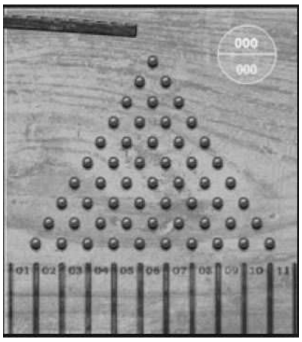
,

,

Valeurs de $\mathbf{u}_\alpha$ à connaître

α	$1-\alpha$	u_α	Interprétation
0,05	0,95	1,96	$p(-1,96 \leqslant X \leqslant 1,96) \approx 0,95$
0,01	0,99	2,58	$p(-2.58 \leqslant X \leqslant 2.58) \approx 0,99$

II.4 Variable aléatoire centrée réduite

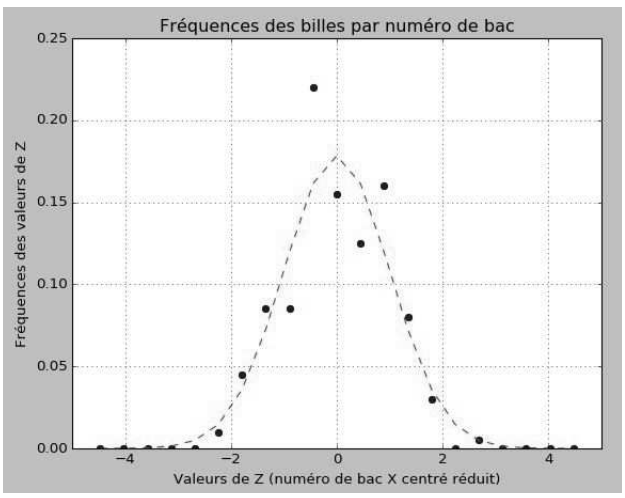


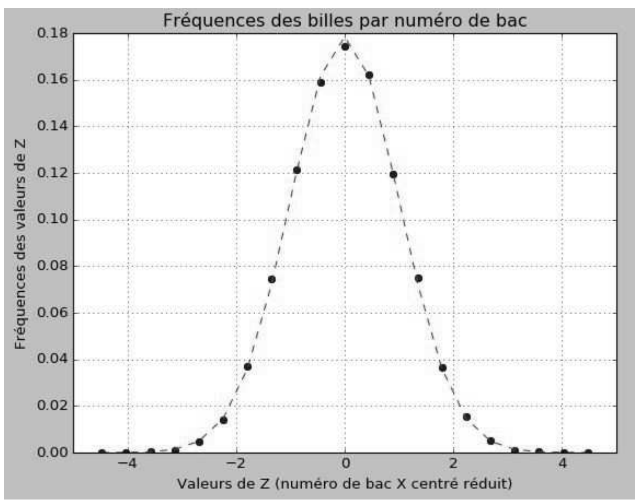
La planche de Galton est un dispositif constitué d'une plaque contenant n rangées disposés en quinconces sur lesquels arrivent des billes. En arrivant sur un plot, chaque bille a une chance sur deux de partir à droite ou à gauche.
En bas de la plaque, les billes arrivent dans des bacs numérotés de 0 à n suivant le nombre de fois qu'elles sont allées à gauche ou à droite au cours de leur descente.
$\longleftarrow$ *Ci-contre une planche de Galton de dix rangées.*

1. On note X la variable aléatoire égale au numéro du bac dans lequel arrive une bille donnée. En supposant que les déplacements d'une rangée à l'autre sont indépendants, déterminer la loi de X.
2. On suppose $n = 20$ et que l'on fait l'expérience avec 200 billes. Quelle est la valeur de l'espé $E(X)$ et de l'écart-type $\sigma(X)$?.
3. On pose $Z = \frac{X-10}{\sqrt{5}}$. On dit que l'on a centré et réduit la variable X. Déterminer l'ensemble des 21 valeurs prises par la variable (compléter le tableau)

$Z = \dots$	$\frac{-10}{\sqrt{5}}$																				

4. On a simulé l'expérience et l'on obtient le graphique suivant :





https://www.youtube.com/watch?v=6YDHBFVIvIs

II.4.1 Théorème de Moivre-Laplace

Soit X_n une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$. Si on fixe la valeur de p et que l'on fait augmenter n, l'histogramme représentant les valeurs prises par X_n semble se rapprocher d'une courbe « en cloche ». En revanche, si on considère la variable aléatoire $\boxed{Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}}$, on s'aperçoit que, quelle que soit la valeur de n choisie, la courbe « en cloche » associée à Z_n semble toujours la même (hauteur, étalement, symétrie par rapport à l'axe des ordonnées). On dit que la variable X_n a été centrée et réduite.

Théorème : Soit X_n une variable aléatoire suivant une $\mathcal{B}(n;p)$. On pose $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$, variable centrée et réduite associée à X_n.
Alors, pour tous réels a et b, $a < b$, on a :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} p(Z_n \in [a;b]) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-t^2/2} \, \mathrm{d}t}$$

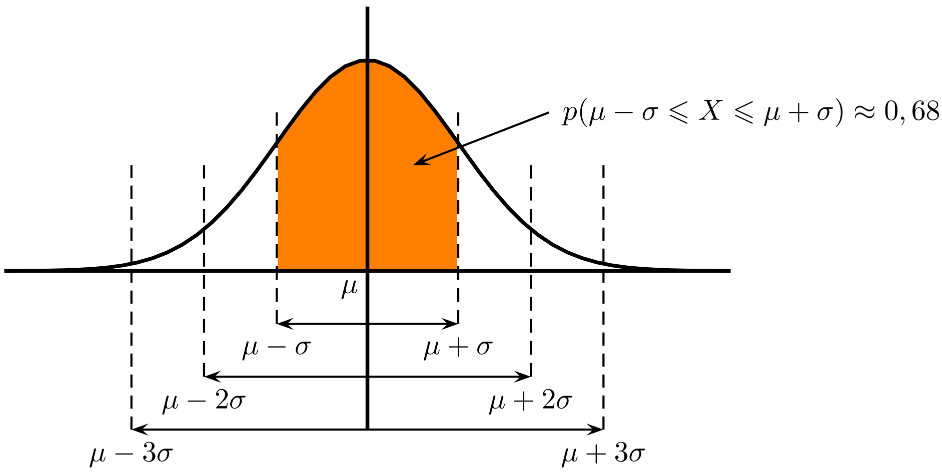
II.4.2 La loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$

Définition : Dire qu'une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ signifie que la variable aléatoire $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$.
L'espérance de X est alors μ et sa variance σ^2.

Démonstration : A partir de $E(aX+b) = aE(X) + b$ et $V(aX+b) = a^2V(X)$.

Remarque 5 La loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ est une loi continue de probabilité à densité, il existe donc une fonction g défine sur $\mathbb{R}$, continue et positive telle que, pour tous $a<b$, on ait $p(a \leqslant X \leqslant b)=\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$. L'expression de $g : t \longmapsto \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathbf{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ n'est pas au programme.

Intervalles « un, deux, trois sigma » :



EXERCICE 7 :

`Sur une chaîne d'embouteillage dans une brasserie, la quantité` X `(en cL) de liquide fournie par la machine pour remplir chaque bouteille de contenance 110 cL peut être modélisée par une varia aléatoire de loi normale de moyenne` μ `et d'écart-type` $\sigma=2$.
`La législation impose qu'il y ait moins de 0,1% de bouteilles contenant moins d'un litre.`

1. A quelle valeur moyenne μ doit-on régler la machine pour respecter cette législation ?
   solution : $\mu \approx 106,18$

2. La contenance des bouteilles étant de 110 cL, quelle est alors la probabilité qu'une bouteille déborde lors du remplissage ?
   solution : $\approx 0,028$

3. Le directeur de la coopérative veut qu'il y ait moins de 1% de bouteilles qui débordent au risque de ne pas suivre la législation.
   (a) Quelle est alors la valeur de μ ?
   solution : $\mu \approx 105,34$

   (b) Quelle est alors, dans les conditions de la question précédente, la probabilité que la bouteille contienne moins d'un litre ?
   solution : $\approx 0,0038$

   (c) La législation n'étant plus respectée, déterminer μ et σ afin qu'il y ait mloins de 0,1% de bouteilles de moins d'un litre **et** moins de 1% de bouteilles qui débordent.
   solution : μ et σ solutions d'un système d'inéquations.