

I Compléter un tableau de variations

f est la fonction définie sur l'intervalle $[-10, 40]$ par

$$f(x) = -x^3 + 30x^2 - 500$$

Son tableau de variations est donné incomplet ci-dessous

x	-10	40
$f'(x)$...	0	0	...
Variations de f	...	↘	↗	↘

II Dérivée de la forme $ax + b$

Lors d'une compétition d'athlétisme, un entraîneur analyse la technique d'une lanceuse de poids, et en particulier la trajectoire du poids lors du lancer.

La hauteur en mètres du poids est donnée par :

$$f(x) = -0,08x^2 + 0,8x + 1,92$$

x étant la longueur entre les pieds de la lanceuse et l'ombre au sol du poids.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0, 12]$, puis dresser le tableau de variations de f sur $[0, 12]$.
3. En déduire la hauteur maximale atteinte par le poids lors du lancer.

III Dérivée de la forme $ax^2 + bx + c$

Le bénéfice réalisé par une entreprise est exprimé en euros et modélisé par la fonction B dont l'expression est

$$B(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 11x^2 - 40x - 72 \text{ où } x \in [5; 30],$$

x représente le nombre de kilogrammes vendus du produit fabriqué par l'entreprise.

1. Conjecturer les variations de B à l'aide de la calculatrice.
2. Montrer que $B'(x) = -(x - 2)(x - 20)$
3. En déduire les variations de B sur l'intervalle $[5; 30]$.
4. (a) On considère que la production est entièrement vendue. Déterminer la quantité à produire pour réaliser le bénéfice maximal.
(b) Le service de commercialisation de l'entreprise a fixé un objectif de vente entre 15 kg et 24 kg pour la semaine à venir. Quel est le bénéfice minimal envisageable?

IV Plus dur

Le nombre d'abonnés (en milliers) à une certaine revue peut être modélisé par la fonction f définie sur $[0, 6]$ par

$$f(x) = -x^4 + 16x^3 - 92x^2 + 208x + 50$$

x étant le nombre d'années écoulées depuis l'année 2006

1. À l'aide de la calculatrice, faire une conjecture sur le maximum de f .
2. Calculer $f'(x)$ puis montrer que $f'(x) = 4(2 - x)(x^2 - 10x + 26)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0, 6]$ et dresser le tableau de variations de f .
4. Quel a été le nombre maximal d'abonnés à cette revue et en quelle année a-t-il été atteint ?