

I Compléter un tableau de variations

f est la fonction définie sur l'intervalle $[-10, 40]$ par

$$f(x) = -x^3 + 30x^2 - 500$$

Son tableau de variations est donné incomplet ci-dessous

x	-10	0	20	40	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
Variations de f	3500		3500		-16500

En effet,

- $f'(x) = -3x^2 + 60x$ et $f'(x) = 0$ admet 0 et 20 comme solutions (on peut par exemple utiliser la technique de résolution utilisant le discriminant $\Delta = 3600$ et $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 0$ puis $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 20$);
- Le signe de $f'(x)$ est donné par la règle « signe de a à l'extérieur des racines » ou ici en utilisant les flèches symbolisant les variations de f ;
- Les valeurs aux extrémités des flèches correspondent à $f(-10)$, $f(0)$, $f(20)$ et $f(40)$.

II Dérivée de la forme $ax + b$

Lors d'une compétition d'athlétisme, un entraîneur analyse la technique d'une lanceuse de poids, et en particulier la trajectoire du poids lors du lancer.

La hauteur en mètres du poids est donnée par :

$$f(x) = -0,08x^2 + 0,8x + 1,92$$

x étant la longueur entre les pieds de la lanceuse et l'ombre au sol du poids.

1. Calculer $f'(x)$: $f'(x) = -2 \times 0,08x + 0,8 \times 1 + 0 = -0,16x + 0,8$
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0, 12]$, puis dresser le tableau de variations de f sur $[0, 12]$: $f'(x) = 0$ donne $x = 5$ et comme $f'(x)$ est une fonction affine à coefficient directeur négatif $(-0,16)$, l'enchaînement des signes de $f'(x)$ est $+, 0, -$.

x	0	5	12
$f'(x)$	+	0	-
Variations de f	1.92	3.92	0

3. En déduire la hauteur maximale atteinte par le poids lors du lancer : **Par simple lecture du tableau de variations, on constate que le maximum de la fonction f est 3,92 obtenu pour $x=5$, ce qui signifie que la hauteur maximale du poids est 3,92 m à 5 m de la lanceuse.**

III Dérivée de la forme $ax^2 + bx + c$

Le bénéfice réalisé par une entreprise est exprimé en euros et modélisé par la fonction B dont l'expression est

$$B(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 11x^2 - 40x - 72 \text{ où } x \in [5; 30],$$

x représente le nombre de kilogrammes vendus du produit fabriqué par l'entreprise.

1. Conjecturer les variations de B à l'aide de la calculatrice : La fonction B semble croissante sur $[5; \approx 20]$ et décroissante sur $[\approx 20; 30]$
2. Montrer que $B'(x) = -(x-2)(x-20)$: $B'(x) = -\frac{1}{3} \times 3x^2 + 11 \times 2x - 40 \times 1 + 0 = -x^2 + 22x - 40$ et $-(x-2)(x-20) = -(x^2 - 20x - 2x + 40) = -x^2 + 22x - 40 = B'(x)$
3. En déduire les variations de B sur l'intervalle $[5; 30]$: $B'(x) = 0$ donne $-(x-2)(x-20) = 0$, c'est à dire $x = 2$ ou $x = 20$ (seule cette valeur est dans $[5; 30]$) et on rassemble tous les renseignements dans le tableau ci-dessous

x	5	15	20	24	30
$x - 2$		+			+
$x - 20$		-	0		+
$(x - 2)(x - 20)$		-	0		+
$B'(x)$		+	0		-
Variations de B			861.33		
		678		696	
	-38.67				-372

4. (a) On considère que la production est entièrement vendue. Déterminer la quantité à produire pour réaliser le bénéfice maximal : Toujours en utilisant le tableau de variations, on constate que la fonction B atteint son maximum d'environ 861,33 pour $x=20$, ce qui constitue la réponse puisque la fonction B représente le bénéfice : il faut donc fabriquer 20 kg de produit pour obtenir un bénéfice maximal
- (b) Le service de commercialisation de l'entreprise a fixé un objectif de vente entre 15 kg et 24 kg pour la semaine à venir. Quel est le bénéfice minimal envisageable? On calcule le bénéfice pour 15 kg et pour 24 kg (valeurs dans le tableau de variations) et comme $B(15) < B(24)$, le tableau de variations permet de conclure que le bénéfice minimal envisageable est 678€

IV Plus dur

Le nombre d'abonnés (en milliers) à une certaine revue peut être modélisé par la fonction f définie sur $[0, 6]$ par

$$f(x) = -x^4 + 16x^3 - 92x^2 + 208x + 50$$

x étant le nombre d'années écoulées depuis l'année 2006

1. À l'aide de la calculatrice, faire une conjecture sur le maximum de f .
2. Calculer $f'(x)$ puis montrer que $f'(x) = 4(2-x)(x^2 - 10x + 26)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0, 6]$ et dresser le tableau de variations de f .
4. Quel a été le nombre maximal d'abonnés à cette revue et en quelle année a-t-il été atteint?

Non corrigé : me demander une correction