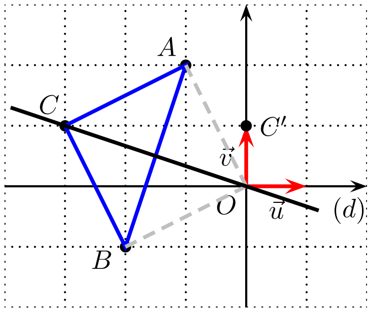
EXERCICE 1 :

On considère les points A, B et C du plan complexe d'affixes respectives

$$a = -1 + 2\mathrm{i} \quad ; \quad b = -2 - \mathrm{i} \quad ; \quad c = -3 + \mathrm{i}.$$

1. Placer les points A, B et C sur le graphique.



2. $\dfrac{b}{a} = \dfrac{-2-\mathrm{i}}{-1+2\mathrm{i}} = \dfrac{-2-\mathrm{i}}{-\mathrm{i}(-2-\mathrm{i})} = \dfrac{1}{-\mathrm{i}} = \mathrm{i}$ or $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = \arg\left(\dfrac{b}{a}\right) = \arg(\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$.
   De plus, $OA = |a| = \sqrt{5}$ et $OB = |b| = \sqrt{5}$ donc le triangle OAB est rectangle et isocèle.
3. On considère l'application f qui à tout point M d'affixe z avec $z \neq 0$, associe le point M' d'affixe z' définie par
$$z' = \frac{z + 1 - 2\mathrm{i}}{z + 2 + \mathrm{i}}$$
   (a) $C' = f(C) \Leftrightarrow c' = \dfrac{c+1-2\mathrm{i}}{c+2+\mathrm{i}} = \dfrac{-3+\mathrm{i}+1-2\mathrm{i}}{-3+\mathrm{i}+2+\mathrm{i}} = \dfrac{-2-\mathrm{i}}{-1+2\mathrm{i}} = \mathrm{i}$ (cf.q1).

   (b) $M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow z \neq b$ et $|z'| = 1 \Leftrightarrow z \neq b$ et $\left|\dfrac{z+1-2\mathrm{i}}{z+2+\mathrm{i}}\right| = 1 \Leftrightarrow z \neq b$ et $|z + 1 - 2\mathrm{i}| = |z + 2 + \mathrm{i}|$
   $\Leftrightarrow z \neq b$ et $|z - a| = |z - b| \Leftrightarrow M \neq B$ et $MA = MB \Leftrightarrow M \in$ médiatrice (d) de $[AB]$
$$\mathcal{E} = (d)$$
   (c) $\mathcal{E}$ contient les points O et C ? Deux façons de procéder, soit on utilise la relation caractérisant les affixes des points de $\mathcal{E}$ ou le fait que $\mathcal{E} = (d)$.

   - $OA = OB$ donc $O \in (d)$, c'est à dire $O \in \mathcal{E}$.
   - $\dfrac{|c-b|}{|c-a|} = \left|\dfrac{c-b}{c-a}\right| = |c'| = |\mathrm{i}| = 1 \Leftrightarrow \dfrac{CB}{CA} = 1 \Leftrightarrow CB = CA \Leftrightarrow C \in (d) \Leftrightarrow C \in \mathcal{E}$

EXERCICE 2 :

- L_k suit une loi normale d'espérance 150 mm et d'écart-type 0,23 mm ;
- H_k suit une loi normale d'espérance 10 mm et d'écart-type 0,1 mm ;
- L_k et H_k sont deux variables aléatoires indépendantes
  (pour tout I_L et I_H, on a : $p((L_k \in I_L) \cap (H_k \in I_H)) = p(L_k \in I_L) \times p(H_k \in I_H)$)

1. Les probabilités s'obtiennent à la calculatrice (arrondies à 10^{-3} près) :
$$p(149,4 < L_k < 150,6) \approx 0,991 \text{ et } p(9,8 < H_k < 10,2) \approx 0.954$$
2. Un élément est acceptable si sa largeur appartient à l'intervalle $[149,4; 150,6]$ et sa hauteur à l'intervalle $[9,8; 10,2]$.
   (a) Quelle est la probabilité qu'une lamelle soit acceptable ? Comme les variables aléatoires sont indépendantes, on a :
$$p((149,4 < L_k < 150,6) \cap (9,8 < H_k < 10,2)) = p(149,4 < L_k < 150,6) \times p(9,8 < H_k < 10,2) \approx 0,945$$
   (b) Quelle est la probabilité qu'une seule des deux dimensions convienne ?
   Soit U :« une seule des dimensions est acceptable », A_L :« la largeur est correcte », A_H :« la hauteur est correcte ». (correcte signifie dans les bons intervalles), on a :
$$U = (A_H \cap \overline{A}) \cup (A_L \cap \overline{A})$$
   Or les deux événements $(A_H \cap \overline{A})$ et $(A_L \cap \overline{A})$ sont incompatibles donc la probabilité de de leur réunion est égale à la somme de leur probabilité.
   $p(U) = p(A_L \cap \overline{A}) + p(A_H \cap \overline{A}) = (1 - p(A))[p(A_L) + p(A_H)] \approx 0,107$

(c) On souhaite qu'une lamelle soit acceptable avec la probabilité de 0,97. On effectue un seul réglage sur la raboteuse qui donne la hauteur. Dans quel intervalle doit-elle se trouver pour que la lamelle soit acceptable ? On appelle u_α la borne supérieure correspondant au réglage de la raboteuse. On reprend, toujours grâce à l'indépendance des variables aléatoires, le relation :
$p((149,4 < L_k < 150,6) \cap (10 - u_\alpha < H_k < 10 + u_\alpha)) = p(149,4 < L_k < 150,6) \times p(-u_\alpha < H_k < u_\alpha) \approx 0,97$
$\Leftrightarrow 0,991 \times p(10 - u_\alpha < H_k < 10 + u_\alpha) \approx 0,97 \Leftrightarrow p(10 - u_\alpha < H_k < 10 + u_\alpha) \approx 0.97/0.991 \approx 0.979$

Avec la calculatrice, on obtient : $u_\alpha \approx 0,23$ et la hauteur de la lamelle doit être dans l'intervalle $[9,77; 10,23]$.

Remarque : On pouvait aussi centrer et réduire la variable H_k en posant $Z_k = \dfrac{H_k - 10}{0,1}$ et on pouvait écrire, sachant que Z_k suit une $\mathcal{N}(0;1)$, $p(10 - u_\alpha < H_k < 10 + u_\alpha) = p(-10u_\alpha < Z_k < 10u_\alpha)$. La calculatrice donne cette fois $10u_\alpha \approx 2,3$ et $-2,3 < Z_k < 2,3 \Leftrightarrow 9.77 < H_k < 10,23$.

3. Une poutre de « lamellé-collé » est constituée de la superposition de 5 lamelles prises au hasard dans la production. On note H_t la variable aléatoire prenant pour valeur la hauteur totale de la poutre et on admet que H_t suit une loi normale. Quels en sont les paramètres ?

On pose $H_t = H_1 + H_2 + H_3 + H_4 + H_5$ avec les variables H_i indépendantes deux à deux.
On peut alors démontrer que $E(H_t) = E(H_1) + E(H_2) + E(H_3) + E(H_4) + E(H_5) = 5 \times 10 = 50$. De même, $V(H_t) = V(H_1) + V(H_2) + V(H_3) + V(H_4) + V(H_5) = 5 \times 0,1 = 0,5$.

Ainsi la variable H_t suit une loi normale $\mathcal{N}(50; 0,5)$.

EXERCICE 3 :

Partie A :

1. f définie sur l'intervalle I$=]0;+\infty[$par $f(x) = \ln(x) + 1 - \dfrac{1}{x}$
   (a) f est une somme de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$.
   Pour tout x de $]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x+1}{x^2}$. Sur $]0;+\infty[$, $x + 1 > 0$ et x^2 également donc $f'(x) > 0$ et f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
   (b) On remarque $f(1) = 0$ donc compte-tenu des variations de f, $f(x) < 0$ sur $]0;1[$ et $f(x) > 0$ sur $]1;+\infty[$.
2. (a) F est dérivable et pour tout x de $[1;+\infty[$, $F'(x) = 1 \times \ln(x) + (x-1) \times \dfrac{1}{x} = \ln(x) + 1 - \dfrac{1}{x} = f(x)$ donc F est une primitive de f sur $[1;+\infty[$.
   (b) D'après la question A.1.b, $f(x) > 0$ sur $]1;+\infty[$ donc comme $F' = f$, F est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.
   (c) On vérifie aisément que $F(1) = 0$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$. De plus $1 - \mathrm{e}^{-1} \in [0;+\infty[$, F est continue et strictement croissante sur $[1;+\infty[$: le théorème de la bijection assure l'existence d'un unique α de $[1;+\infty[$ tel que $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-1}$.

x	1	α	$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	
Variations de f	0	$1 - \mathrm{e}^{-1}$	$+\infty$

   On obtient à la calculatrice : $1,94 < \alpha < 1,95$

Partie B :

1. L'abscisse de A est solution de l'équation $h(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{-1}$. Ainsi $A(\mathrm{e}^{-1}; 0)$.
2. L'abscisse de P est solution de l'équation $h(x) = g(x) \Leftrightarrow h(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. De plus $h(1) = g(1) = 1$ donc $P(1;1)$.
3. On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine limité par $\mathcal{C}_g$, $\mathcal{C}_h$ et les droites d'équations $x = \mathrm{e}^{-1}$ et $x = 1$.
   (a) Graphiquement, on constate que $g(x) > h(x)$ pour $x \in]0;1]$. Or $f(x) = h(x) - g(x)$ et $f(x) < 0$ sur $]0;1[$ (Q.A.1.b) donc, grâce entre autre à la continuité de f sur $]0;1]$, on peut écrire que :

$$\mathcal{A} = \int_{\mathrm{e}^{-1}}^{1} -f(x)\,\mathrm{d}x$$

(b) $\mathcal{A} = \displaystyle\int_{e^{-1}}^{1} -f(x)\,dx = [-F(x)]_{e^{-1}}^{1} = -(0 - (e^{-1} - 1)\ln(e^{-1})) = 1 - e^{-1}$ car $\ln(e^{-1}) = -1$.

4. t est un nombre strictement supérieur à 1.
On note $A(t)$ l'aire du domaine délimité par les droites d'équations $x = 1$, $x = t$, et les courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$.
On veut déterminer une valeur t telle que $A(t) = \mathcal{A}$.
   (a) Pour $x \in [1; t]$, $f(x) > 0 \Leftrightarrow h(x) - g(x) > 0 \Leftrightarrow h(x) > g(x)$.
   On a donc $A(t) = \displaystyle\int_{1}^{t} f(x)\,dx = [F(x)]_1^t = (t-1)\ln(t)$
   (b) On remarque que, pour $t \geqslant 1$, $A(t) = F(t)$. Ainsi la question revient à chercher la valeur de t pour laquelle $F(t) = \mathcal{A}$. Or d'après la question B.3.b, $\mathcal{A} = 1 - e^{-1}$: la question revient donc à trouver t tel que $F(t) = 1 - e^{-1}$. C'est α trouvé en A.2.c.
   En définitive, pour $t = \alpha$, les deux aires de la figure sont égales.

EXERCICE 4 :

Partie A :

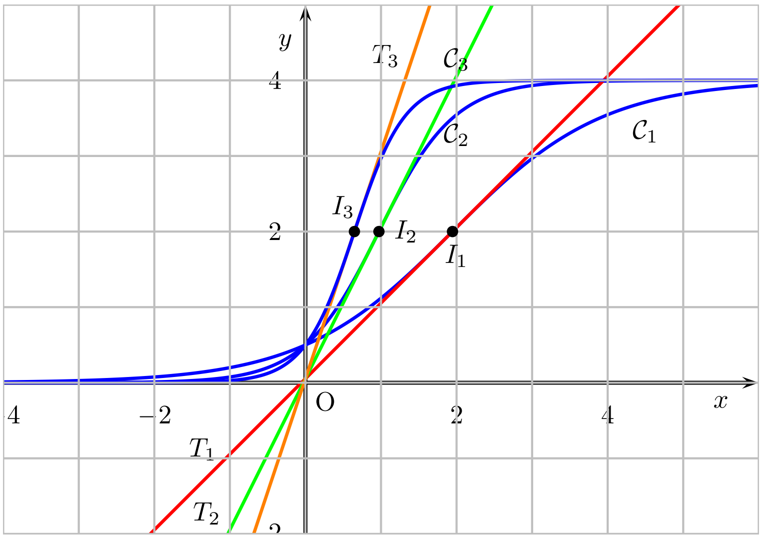
1. On multiplie par e^x au numérateur et au dénominateur : $\dfrac{4 \times e^x}{e^x \times (1 + 7e^{-x})} = \dfrac{4}{1 + 7e^{-x}}$, donc $f_1(x) = \dfrac{4}{1 + 7e^{-x}}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

2. (a) La courbe $\mathcal{C}_1$ admet deux asymptotes car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{4}{7e^{-x}+1} = \frac{4}{0+1} = 4$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{4e^x}{e^x+7} = \frac{0}{0+7} = 0$
   Donc en $-\infty$ asymptote à $\mathcal{C}_1$: la droite horizontale d'équation $y = 0$.
   Donc en $+\infty$ asymptote à $\mathcal{C}_1$: la droite horizontale d'équation $y = 4$.
   (b) $f_1'(x) = \dfrac{4 \times 7e^{-x}}{(1 + 7e^{-x})^2}$, donc $f_1'(x) > 0$ et f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   (c) On obtient le tableau de variations :

x	$-\infty$ $+\infty$
Signe de $f_1'(x)$	$+$
Variations de f_1	$0 \nearrow 4$

   Une simple lecture du tableau de variations, permet d'écrire que : $0 < f_1(x) < 4$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

3. (a) $\Omega(a; b)$ est centre de symétrie de la courbe (d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$) si, et seulement si :
$$\frac{f(a+h) + f(a-h)}{2} = b,\ \forall h \in \mathbb{R}.$$
   $\forall h \in \mathbb{R},\ f_1(\ln(7)+h) = \dfrac{4}{7e^{-\ln(7)-h}+1} = \dfrac{4}{7e^{\ln(1/7)-h}+1} = \dfrac{4}{7e^{\ln(1/7)}e^{-h}+1} = \dfrac{4}{7 \times \frac{1}{7} \times e^{-h}+1} = \dfrac{4}{e^{-h}+1}$
   De la même manière, on obtient $\forall h \in \mathbb{R},\ f_1(\ln(7) - h) = \dfrac{4}{e^h + 1}$, puis
$$\frac{f_1(\ln(7)+h) + f_1(\ln(7)-h)}{2} = \frac{\frac{4}{e^h+1} + \frac{4}{e^{-h}+1}}{2} = \frac{\frac{4}{e^h+1} + \frac{4e^h}{1+e^h}}{2} = \frac{4e^h+4}{2(1+e^h)} = \frac{4(e^h+1)}{2(1+e^h)} = 2$$
   Donc $I_1(\ln(7); 2)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_1$
   (b) $f'(\ln(7)) = \dfrac{4 \times 7e^{-\ln(7)}}{(1+7e^{-\ln(7)})^2} = \dfrac{28e^{\ln(1/7)}}{(1+7e^{\ln(1/7)})^2} = \dfrac{28 \times \frac{1}{7}}{(1 + 7 \times \frac{1}{7})^2} = \dfrac{4}{2^2} = 1$
   $f_1(\ln(7)) = 2$ (cf.Q3.a avec $h = 0$), donc l'équation de la tangente (T_1) à la courbe $\mathcal{C}_1$ au point I_1 :
$$y = 1(x - \ln(7)) + 2 \Leftrightarrow y = x - \ln(7) + 2.$$

(c) 

4. (a) Une primitive de la fonction $f_1 : x \mapsto 4 \times \dfrac{e^x}{7+e^x}$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction $F_1 : x \mapsto 4 \times \ln(7+e^x)$
   ($f_1 = 4 \times \dfrac{u'}{u}$ avec $u : x \mapsto e^x + 7$ et $u > 0$ sur $\mathbb{R}$).

   (b) La valeur moyenne de f_1 sur l'intervalle $[0; \ln 7]$ est :
   $$\frac{1}{\ln(7)}\int_0^{\ln(7)} f_1(t)\,dt = \frac{1}{\ln(7)}\left[F_1(t)\right]_0^{\ln(7)} = \frac{1}{\ln(7)}(4\times\ln(7+e^{\ln(7)}) - 4\ln(e^0+7)) = \frac{4}{\ln(7)} \times \ln\left(\frac{7}{4}\right)$$

Partie B :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(0) = \dfrac{4e^0}{e^0+7} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$. Ainsi $A\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

2. (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on résout :
   $f_n(x) = 2 \Leftrightarrow 4e^{nx} = 2e^{nx} + 14 \Leftrightarrow e^{nx} = 7 \Leftrightarrow nx = \ln(7) \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln(7)}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. $\boxed{x = \dfrac{\ln(7)}{n}}$

   (b) $\forall n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = f_1(nx)$. Ainsi $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n'(x) = n \times f_1'(nx) = \dfrac{4n \times 7e^{-nx}}{(1+7e^{-nx})^2}$
   $f_n'\left(\dfrac{\ln(7)}{n}\right) = \dfrac{4n \times 7e^{-n\times\ln(7)/n}}{\left(1+7e^{-n\ln(7)/n}\right)^2} = n \times \dfrac{4\times 7e^{\ln(1/7)}}{\left(1+7e^{\ln(1/7)}\right)^2} = n \times \dfrac{4\times 1}{(1+7\times\frac{1}{7})^2} = n \times \dfrac{4}{(1+1)^2} = n.$
   Une équation de la tangente (T_n) à la courbe $\mathcal{C}_n$ au point I_n est
   $$y = n(x - \tfrac{\ln(7)}{n}) + 2 = nx - \ln(7) + 2$$
   L'ordonnée à l'origine ne dépend pas de n donc les tangentes T_n coupent l'axe des ordonnées en $(0; 2-\ln(7))$.

   (c) Voir dessin plus haut.

3. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par
   $$u_n = \frac{n}{\ln(7)}\int_0^{\frac{\ln(7)}{n}} f_n(x)\,dx.$$
   Une primitive de f_n est $F_n(x) = \dfrac{4}{n}\ln(e^{nx}+7)$ donc :
   $u_n = \dfrac{n}{\ln 7} \times \dfrac{4}{n} \times (\ln(e^{n\times\frac{\ln 7}{n}}+7) - \ln(8)) = \dfrac{4}{\ln 7} \times (\ln(e^{\ln 7}+7) - \ln(8)) = \dfrac{4}{\ln 7} \times \ln(14) - \ln(8)) = \dfrac{4}{\ln 7} \times (\ln(\dfrac{14}{8}) = \dfrac{4}{\ln 7} \times \ln\left(\dfrac{7}{4}\right)$ qui ne dépend pas de n.
   La suite (u_n) est constante.