EXERCICE 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = x\left[\ln(2x+1) - \ln(x)\right]$.

Pour $x > 0$, $f(x) = x\left[\ln(2x) + \ln\left(1 + \dfrac{1}{2x}\right) - \ln(x)\right] = x\ln(2) + x\ln\left(1 + \dfrac{1}{2x}\right)$ $(\bigstar)$

On utilise le développement limité de $\ln(1+X)$ en 0 pour déterminer le dévelopement asymptotique de $\ln\left(1 + \dfrac{1}{2x}\right)$ en $+\infty$.

On obtient : $\ln\left(1 + \dfrac{1}{2x}\right) = \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2x}\right)^2 + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{8x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

En multipliant par x, et compte-tenu de $(\bigstar)$:

$$f(x) = \ln(2)x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

On en déduit que la droite (Δ) : $y = \ln(2)x + \dfrac{1}{2}$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ et elle se trouve au-dessus de la courbe.

EXERCICE 2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{1/x}$.

On utilise le développement limité de e^X en 0 pour déterminer le dévelopement asymptotique de $\mathrm{e}^{1/x}$ en $+\infty$.

On obtient : $\mathrm{e}^{1/x} = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Ainsi, $(x+1)\mathrm{e}^{1/x} = (x+1)\left(1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right) = x + 2 + \dfrac{3}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$

On en déduit que la droite (Δ) : $y = x + 2$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ et elle se trouve au-dessous de la courbe.

EXERCICE 3 :

Pour $n \geqslant 1$, $A(n) = 2\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \sqrt{n}\left(2 - \sqrt{1 + \dfrac{1}{n}} - \sqrt{1 - \dfrac{1}{n}}\right)$

On utilise $\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + o(x^2)$

cela donne, $A(n) = \sqrt{n}\left(2 - 1 - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{8n^2} - 1 + \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{8n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = \dfrac{1}{4n\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$.

Ainsi $2\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n\sqrt{n}}$

EXERCICE 4 :

Pour $n \geqslant 1$, $A(n) = \dfrac{\ln(n+1) - \ln(n)}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \dfrac{\ln(n) + \ln(1+1/n) - \ln(n)}{\sqrt{n}(\sqrt{1+1/n} - 1)} = \dfrac{\ln(1+1/n)}{\sqrt{n}(\sqrt{1+1/n} - 1)}$

On obtient : $\dfrac{\ln(1+1/n)}{\sqrt{n}(\sqrt{1+1/n} - 1)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1/n}{\sqrt{n}(1/2n)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

Finalement, $\dfrac{\ln(n+1) - \ln(n)}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{\sqrt{n}}$

EXERCICE 5 :

Soit deux applications f et g définies sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$, par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = 2n \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ g(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & si\ n\ est\ pair \\ \dfrac{n-1}{2} & si\ n\ est\ impair \end{cases}$$

1. f n'est pas surjective car les nombres impairs n'ont pas d'antécédent par f (non atteints). f est injective car une image n'est obtenue que pour un seul n ($f(n) = f(n') \Leftrightarrow 2n = 2n' \Leftrightarrow n = n'$). N'étant pas surjective, f ne peut être bijective.
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ g \circ f(n) = g(f(n)) = g(2n) = n$ donc $g \circ f = id_{\mathbb{N}}$ et $g \circ f$ est bijective.
   $f \circ g(n) = \begin{cases} n & si\ n\ est\ pair \\ n-1 & si\ n\ est\ impair \end{cases}$
   $f \circ g$ n'est pas surjective car les impairs ne sont pas atteints et elle n'est pas injective car les nombres pairs sont atteints par deux entiers consécutifs. Elle n'est évidemment pas bijective.

EXERCICE 6 :

L'application f est définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x^2 + \sin(y) \end{aligned}$$

1. $f(1, 0) = 1 = f(-1, 0)$ donc l'application f n'est pas injective. En effet, $(1, 0) \neq (-1, 0)$ et les deux couples ont la même image. (contre-exemple à la propriété $x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$)
2. Pour tout x réel, $x^2 \geqslant 0$ et pour tout y, $\sin(y) \geqslant -1$ donc $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) \geqslant -1$. Les réels strictement inférieurs à -1 n'ont pas d'antécédent par f. L'application f n'est pas surjective.

EXERCICE 7 :

On considère l'application f définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{2x}{1+x^2} \end{aligned}$$

1. L'application f n'est pas injective car $f(2) = \dfrac{4}{5} = f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
2. L'application f n'est pas surjective car 2 n'admet pas d'antécédent par f ($f(x) = 2$ se traduit par $x^2 - x + 1 = 0$ qui n'a pas de solution réelle).
3. Soit $y \in \mathbb{R}$. $f(x) = y \Leftrightarrow yx^2 - 2x + y = 0$. Or cette équation admet au moins une solution si et seulement si son discriminant $\Delta = 4 - 4y^2$ est positif ou nul. Ceci impose donc que $y \in [-1; 1]$. Ainsi $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.