EXERCICE 1 :
n est un entier relatif différent de 3.

1. Pour tout entier relatif différent de 3, $\dfrac{n^2-2n+9}{n-3} = n+b+\dfrac{c}{n-3} \Leftrightarrow \dfrac{n^2-2n+9}{n-3} = \dfrac{(n+b)(n-3)+c}{n-3}$

   $\Leftrightarrow \dfrac{n^2-2n+9}{n-3} = \dfrac{n^2+n(b-3)+c-3b}{n-3} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b-3=-2 \\ c-3b=9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b=1 \\ c=12 \end{array}\right.$.

   Ainsi, $\forall n \neq 3$, $\dfrac{n^2-2n+9}{n-3} = n+1+\dfrac{12}{n-3}$.

2. Pour quelles valeurs de n le nombre rationnel $\dfrac{n^2-2n+9}{n-3}$ est-il un entier ?

   D'après ce qui précède, si pour $n \neq 3$, $n-3|12$ alors $\dfrac{n^2-2n+9}{n-3}$ sera un entier. En effet, il existera $k \in \mathbb{Z}$ tel que $12 = k(n-3)$ et dans ce cas, on aurait $\forall n \neq 3$, $\dfrac{n^2-2n+9}{n-3} = n+1+k$.

   Or $n-3|12$ (avec $n \neq 3$)$\Leftrightarrow n-3 \in \{-12;-6;-4;-3;-2;-1;1;2;3;4;6;12\} \Leftrightarrow n \in \{-9;-3;-1;0;1;2;4;5;6;7;9;15\}$

   On teste les valeurs trouvées par condition nécessaire :

n	quotient
-9	-9
-3	-4
-1	-3
0	-3
1	-4
2	-9
4	17
5	12
6	11
7	11
9	12
15	17

   Elles sont toutes entières, donc conviennent toutes.

EXERCICE 2 :
n est un entier naturel.

Quels sont les entiers naturels pour lesquels le reste de la division de $(n+1)^3$ par n^2 est $3n+1$?

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)^3 = n^3+3n^2+3n+1 = n^2(n+3)+3n+1$.

On reconnaît une écriture de la forme $a = bq+r$. Pour que la relation précédente soit l'expression de la dicvision euclidienne de $(n+1)^3$ par n^2, on doit avoir, condition sur le reste,

$$3n+1 < n^2 \text{ et } n \text{ entier naturel} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} n^2-3n-1>0 \\ n \in \mathbb{N} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} n \in \left]-\infty; \dfrac{3-\sqrt{13}}{2}\right[\cup \left]\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}; +\infty\right[\\ n \in \mathbb{N} \end{array}\right. \Rightarrow n \geqslant 4$$

Ainsi le reste de la division de $(n+1)^3$ par n^2 est $3n+1$ pour $n \geqslant 4$.