1. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n^3 + 5n$ est un multiple de 6.

   Soit, pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$: $n^3 + 5n$ est un multiple de 6.
   Initialisation : $n = 0$ et $0^3 + 0 = 0$ et 0 est un multiple de 6 donc $P(0)$ est vraie.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que P_n est vraie implique $P(n+1)$ vraie.

   $P(n)$ est vraie $\Leftrightarrow$ $n^3 + n$ est un multiple de 6

   L'expression $(n+1)^3 + 5(n+1) = n^3 + 5n + 3n(n+1) + 6$ est donc la somme de multiples de 6 (★) donc $(n+1)^3 + 5(n+1)$ est un multiple de 6 et $P(n+1)$ est vraie.

   (★) : $\forall n \in \mathbb{N}$,
   $(n+1)^3 + 5(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5$
   $= n^3 + 5n + 3n^2 + 3n + 6 = n^3 + 5n + 3n(n+1) + 6$

   $n(n+1)$ est un multiple de 2 (l'un des deux nombres n ou $n+1$ est pair) donc $3n(n+1)$ est un multiple de 6 et 6 est un multiple de 6.

   Conclusion :
   Ainsi pour tout entier naturel n : $n^3 + 5n$ est un multiple de 6.

2. En déduire que les entiers suivants sont des multiples de 6 :
   (a) $n^3 + 17n + 12$;

   $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^3 + 17n + 12 = (n^3 + 5n) + 6(2n + 2)$. D'après ce qui précède, $n^3 + 5n$ est un multiple de 6 et $6(2n + 2)$ également. la somme de deux multiples de 6 est un multiple de 6, d'où le résultat.

   (b) $n^3 + 2015n$;

   $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^3 + 2015n = (n^3 + 5n) + 6 \times 335n$, le même raisonnement que le précédent conduit au résultat.

   (c) le produit de trois entiers consécutifs.

   $\forall n \in \mathbb{N}^*$, trois entiers naturels consécutifs s'écrivent $n - 1$, n et $n + 1$.
   $(n-1)n(n+1) = (n^2 - n)(n+1) = n^3 - n = (n^3 + 5n) - 6n$. Et voilà .....