Analyse : Théorème de convergence dominée d'une suite de fonctions, intégration terme à terme d'une série de fonctions + Révisions Algèbre linéaire

EXERCICE 1 :

On note E l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On note F, l'ensemble des fonctions de la forme :

$$x \longmapsto P(x)\cos(x) + Q(x)\sin(x)$$

où P et Q sont des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à 1.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. On considère les fonctions
$$f_1 : x \mapsto \cos(x),\ f_2 : x \mapsto x\cos(x),\ f_3 : x \mapsto \sin(x),\ f_4 : x \mapsto x\sin(x).$$
Montrer que la famille $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de F.
3. On note D l'application qui à toute fonction de F associe $D(f) = f'$, sa dérivée.
   (a) Montrer que D est un endomorphisme de F.
   (b) Déterminer la matrice M de D dans la base $\mathcal{B}$.
   (c) Prouver que M est inversible.

EXERCICE 2 :

1. Énoncer le théorème de convergence dominée d'une suite de fonctions.
2. Étudier la suite $\displaystyle\int_0^1 nx(1-x)^n \mathrm{d}x$.

EXERCICE 3 :

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ avec $f_n(x) = (x^{2n} + x^n + 1)^{-\frac{1}{n}}$

EXERCICE 4 :

1. Énoncer le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions.
2. Montrer que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \left(\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x}\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2\ln(n)}$.

EXERCICE 5 :

Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E.
Montrer l'équivalence

$$\ker f = \mathrm{Im} f \Leftrightarrow f^2 = 0 \text{ et } n = 2\mathrm{rg}(f)$$

EXERCICE 6 :

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

EXERCICE 7 :

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$

CORRECTIONS

EXERCICE 1 :

1. F est évidemment non vide, il contient par exemple $x \longmapsto \cos(x)$.
Soit $f \in F$, alors il existe $P_f \in \mathbb{R}_1[X]$ et $Q_f \in \mathbb{R}_1[X]$ tel que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = P_f(x)\cos(x) + Q_f(x)\sin(x)$.
De même, soit $g \in F$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = P_g(x)\cos(x) + Q_g(x)\sin(x)$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (P_f(x) + P_g(x))\cos(x) + (Q_f(x) + Q_g(x))\sin(x)$. Or $\mathbb{R}_1[X]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel donc $P_f + P_g \in \mathbb{R}_1[X]$ et $Q_f + Q_g \in \mathbb{R}_1[X]$. Ainsi $f + g \in F$. On prouve de même que si $f \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f \in F$.

2. Soit $f \in F$, alors il existe a, b, c et d réels tels que :
$f(x) = (ax+b)\cos(x) + (cx+d)\sin(x) = af_2(x) + bf_1(x) + cf_4(x) + df_3(x)$, donc la famille $\mathcal{B}$ est génératrice.

   Montrons qu'elle est libre : Si $\forall x \in \mathbb{R}$, $(ax+b)\cos(x) + (cx+d)\sin(x) = 0$, alors pour $x = 0$, on obtient $b = 0$.
$x = \pi \Longrightarrow -a\pi - b = 0$ et comme $b = 0$, $a = 0$.
Avec $x = \pi/2$ et $x = 3\pi/2$, on obtient $\left\{\begin{array}{l} c\pi/2 + d = 0 \\ -3c\pi/2 - d = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c = 0 \\ d = 0 \end{array}\right.$. Finalement la famille est libre, comme elle est également génératrice, c'est une base.

3. On note D l'application qui à toute fonction de F associe $D(f) = f'$, sa dérivée.
   (a) D est un endomorphisme de F : $D(f) \in F$ et on utilise la linéarité de l'opérateur dérivation. (solution laissée à la sagacité du lecteur)
   (b) $D(f_1) = -f_3$, $D(f_2) = f_1 - f_4$, $D(f_3) = f_1$ et $D(f_4) = f_2 + f_3$.
   On obtient donc la matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   (c) On peut prouver que le rang de la matrice est 4 donc elle est inversible (vecteurs colonnes liéairement indépendants) et
$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 2 :

1. C'est le cours.
2. On note $f_n(x) = nx(1-x)^n$ pour $x \in [0;1]$.

   - f_n est continue sur $[0;1]$ car c'est une fonction polynomiale ;
   - $x \in]0;1]$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (comparaison entre n et $(1-x)^n$ exponentielle).
   Pour $x = 0$, $f_n(x) = f_n(0) = 0$. Ainsi la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $f = 0$.
   - f est continue sur $[0;1]$.
   - Domination : $\forall x \in [0;1]$, $f_n'(x) = n(1-x)^{n-1}[1-(n+1)x]$ d'où le tableau de variations.

x	0		$\frac{1}{n+1}$		1
Signe de $f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f_n	0	$\nearrow$	$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$	$\searrow$	0

   Or $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \mathrm{e}^{-(n+1)\ln(1+1/n)}$, le tableau de variations nous permet d'écrire que :
$$\forall x \in [0;1],\ 0 \leqslant f_n(x) \leqslant \mathrm{e}^{-(n+1)\ln(1+1/n)} = \mathrm{e}^{-a(n)} \text{ avec } a(t) = (t+1)\ln\left(1+\frac{1}{t}\right),\ t > 0.$$

$\forall t > 0$, $a'(t) = \ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right) - \dfrac{1}{t}$ donc $a'(t) < 0$ (en effet $\ln(1+x) \leqslant x$, $x > 0$). Ainsi a est décroissante sur $]0;+\infty[$; de plus,

$$a(t) = (t+1)\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$ On peut donc affirmer que :

$$\forall t \in]0;+\infty[,\ a(t) > 1 \Leftrightarrow -(t+1)\ln\left(1+\frac{1}{t}\right) < -1 \Leftrightarrow \left(\frac{t}{t+1}\right)^{t+1} < \frac{1}{\mathrm{e}}$$

On a donc $0 \leqslant f_n(x) < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ est positive, continue et intégrable sur $[0;1]$, le théorème de convergence dominée s'applique et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$$

Remarque 1 Plus simplement, on pouvait remarquer que $0 \leqslant f_n(x) < 1$ pour $x \in [0;1]$, car $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) > 0$ et $\mathrm{e}^{-X} < 1$ pour $X > 0$. Et, $x \longmapsto 1$ est également positive, continue et intégrable sur $[0;1]$.

EXERCICE 3 :

$f_n(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{n}\ln(1+x^n+x^{2n})}$.

- f_n est définie, continue sur $[0;+\infty[$ car $x \geqslant 0 \Rightarrow x^n + x^{2n} \geqslant 0$.
- **- $\mathbf{0} \leqslant \mathbf{x} < \mathbf{1}$**, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (laissé à l'appréciation du lecteur)

  - $f_n(1) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{n}\ln(3)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

  - $\mathbf{x} > \mathbf{1}$, $\ln(1+x^n+x^{2n}) = \ln(x^{2n}) + \ln\left(1+\dfrac{1}{x^n}+\dfrac{1}{x^{2n}}\right) \Leftrightarrow \dfrac{1}{n}\ln(1+x^n+x^{2n}) = 2\ln(x) + \dfrac{1}{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^n}+\dfrac{1}{x^{2n}}\right)$

  Or $\dfrac{1}{x^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{1}{x^{2n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\ln(x^2)} = \dfrac{1}{x^2}$

  Finalement, (f_n) converge simplement sur $[0;+\infty[$ vers la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1/x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$
- f est continue sur $[0;+\infty[$.
- Domination : si $0 \leqslant x \leqslant 1$, $f_n(x) \leqslant 1$ car $\dfrac{1}{n}\ln(1+x^2+x^{2n}) \geqslant 0$.

  Si $x \geqslant 1$, $f_n(x) \leqslant \dfrac{1}{x^2}$.

  En effet $1+x^n+x^{2n} \geqslant x^{2n} \Leftrightarrow \ln(1+x^n+x^{2n}) \geqslant 2n\ln(x) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\frac{1}{n}\ln(1+x^n+x^{2n})} \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{1}{n}(2n\ln(x))} \Leftrightarrow f_n(x) \leqslant \dfrac{1}{x^2}$.

  $f_n \leqslant f$ et f est continue, positive et intégrable sur $[0;+\infty[$.

Le théorème de convergence dominée s'applique, f_n est intégrable et :

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 2$$

EXERCICE 4 :

1. C'est le cours.
2. Pour $n \geqslant 2$, $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x} = \mathrm{e}^{-x\ln(n)}$, f_n est continue sur $[2;+\infty[$. Pour $x > 1$, $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}$ est une série convergente (ce sont des séries de Riemann) d'où la convergence simple de la série.

   Remarque 2 la fonction ζ de Riemann est définie sur $]1;+\infty[$ par $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$ donc $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^x} = \zeta(x) - 1$

On prouve que ζ est continue sur $[2;+\infty[$: (hors programme de la colle) $\forall x \geqslant 2$, $\dfrac{1}{n^x} = \mathrm{e}^{-x\ln n} \leqslant \mathrm{e}^{-2\ln n} = \dfrac{1}{n^2}$ et $x \longmapsto \mathrm{e}^{x\ln n}$ continue sur $[2;+\infty[$. La convergence normale étant établie sur $[2;+\infty[$, ζ est continue sur $[2;+\infty[$.

$$\sum_{n\geqslant 2}\int_2^{+\infty}|f_n(x)|\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 2}\int_2^{+\infty}\frac{1}{n^x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 2}u_n \text{ avec } u_n = \int_2^{+\infty}\frac{1}{n^x}\,\mathrm{d}x = \int_2^{+\infty}\mathrm{e}^{-x\ln(n)}\,\mathrm{d}x = \lim_{X\to+\infty}\left[-\frac{\mathrm{e}^{-X\ln(n)}}{\ln(n)}\right]_2^X$$

Donc $u_n = \dfrac{1}{\ln(n)\mathrm{e}^{2\ln(n)}} = \dfrac{1}{n^2\ln(n)}$ et pour $n \geqslant 3$, $\dfrac{1}{n^2\ln(n)} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ car pour $n \geqslant 3$, $\ln(n) \geqslant 1$.

On a établi la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\int_2^{+\infty}|f_n(x)|\,\mathrm{d}x$.

On peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme des séries sur $[2;+\infty[$:

$$\int_2^{+\infty}(\zeta(x)-1)\,\mathrm{d}x = \int_2^{+\infty}\left(\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^x}\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2\ln(n)}$$

EXERCICE 5 :

($\Rightarrow$) Si ker$f$=Imf alors pour tout x de E, $f(f(x)) = 0$ car $f(x) \in \mathrm{Im}f$ qui est inclus dans ker$f$.
De plus, avec le théorème du rang, dim(E)=rg(f)+dim(ker$f$)=2rg(f) car dim(ker$f$)=rg(f).

($\Leftarrow$) Si $f^2 = 0$ et n =2rg(f) alors pour tout x de E, $f(f(x))$=0 et $f(x) \in \ker f$, or $f(x) \in \mathrm{Im}f$ d'où Imf $\subset$ker$f$ (1). Avec le théorème du rang, 2rg(f)=rg(f)+dim(ker$f$)$\Leftrightarrow$rg(f)=dim(ker$f$). L'inclusion (1) et l'égalité des dimensions implique Imf=ker$f$.

EXERCICE 6 :

Non corrigé (correction Précis Analyse PC p 237)

EXERCICE 7 :

Non corrigé (correction Précis Analyse PC p 239)