Analyse : Séries numériques + Révisions Analyse de PCSI

EXERCICE 1 :

Étude de la série de terme général :

1. $a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$
2. $w_n = \binom{n}{2} a^{2n}$
3. $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} - \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n}$

EXERCICE 2 :

1. $b_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{1}{t^3 + 2t^2} \mathrm{d}t$
   (on pourra écrire, pour tout $t \geqslant 1$, $\dfrac{1}{t^3 + 2t^2}$ sous la forme $\dfrac{a}{t+2} + \dfrac{b}{t} + \dfrac{c}{t^2}$ avec a, b et c des réels à déterminer.)
2. $u_n = n^{1/n} - n^{1/n+1}$
3. $u_n = \arccos\left[\left(1 - \frac{1}{n^3}\right)^{1/2}\right]$

EXERCICE 3 :

Calculer $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$. En déduire la série de terme général $u_n = \sin[\pi(2+\sqrt{3})^n]$.

EXERCICE 4 :

Étudier la série produit de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ par elle-même.

EXERCICE 5 :
On considère l'équation (E) : $x^n \mathrm{e}^x = 1$.

1. Montrer que (E) admet sur $[0; +\infty[$ une solution unique que l'on notera a_n.
2. Prouver que (a_n) converge et déterminer sa limite.
3. Donner un équivalent de $a_n - 1$ et en déduire la nature de la série de terme général $a_n - 1$.

EXERCICE 6 :

Nature de la série de terme général : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n + \frac{(-1)^n}{\ln(n)}}$

EXERCICE 7 :

Convergence et somme de $\sum u_n$ avec $u_n = (-1)^n \dfrac{n^2+n+1}{2^n}$.

Corrections

EXERCICE 1 :

1. On utilisant les développements généralisés : $n \geqslant 1,\ a_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{6n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right) - \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$

   $a_n = \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$, qui est le terme général d'une série convergente ($\alpha = 2$)

2. $w_n > 0$ et $w_n = \dfrac{n!}{(n-2)!2!}a^{2n} = \dfrac{n(n-1)a^{2n}}{2}$ puis $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{(n+1)n}{n(n-1)}a^2$.

   $$\text{On a donc } \lim_{n\to+\infty} \frac{w_{n+1}}{w_n} = a^2$$

   Avec le critère de d'Alembert, on obtient

   - Si $a < 1$, $\sum w_n$ converge ;
   - Si $a > 1$, $\sum w_n$ diverge ;
   - Si $a = 1$, $w_n = \dfrac{n(n-1)}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\sum w_n$ diverge grossièrement.

3. $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{3n} - \left(1 + \dfrac{3}{n}\right)^{n} = e^3\left(1 - \dfrac{1}{2n} + 1 + \dfrac{9}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^3\dfrac{4}{n}$

   D'où $u_n > 0$ pour n assez grand et $\sum u_n$ diverge (série harmonique)

EXERCICE 2

1. $t \longmapsto \dfrac{1}{t^3 + 2t^2}$ est continue et positive sur $[1; +\infty[$ et $\dfrac{1}{t^3 + 2t^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^3}$ d'où l'existence de b_n (intégrale convergente : Riemann avec $\alpha = 3$)

   Pour tout $t \geqslant 1$, $\dfrac{1}{t^3 + 2t^2} = \dfrac{1}{4(t+2)} - \dfrac{1}{4t} + \dfrac{1}{2t^2}$.

   $\displaystyle\int_n^X \frac{1}{t^3 + 2t^2}dt = \int_n^X \frac{1}{4(t+2)} - \frac{1}{4t} + \frac{1}{2t^2}dt = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{X+2}{X}\right) - \frac{1}{2X} - \frac{1}{4}\ln\left(\frac{n+2}{n}\right) + \frac{1}{2n}$.

   $b_n = \displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{1}{4}\ln\left(\frac{X+2}{X}\right) - \frac{1}{2X} - \frac{1}{4}\ln\left(\frac{n+2}{n}\right) + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{4}\ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $b_n > 0$ et $\sum b_n$ converge (Riemann $\alpha = 2$)

2. $u_n = n^{1/n} - n^{1/n+1} = e^{(1/n)\ln n} - e^{(1/n+1)\ln n} = e^{(1/n)\ln n}\left[1 - e^{(-1/n(n+1))\ln n}\right]$

   Or $1 - e^\alpha \underset{\alpha\to 0}{\sim} -\alpha$ et comme $\dfrac{\ln n}{n(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on obtient :

   $$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{(1/n)\ln n}\frac{\ln n}{n(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n^2} \text{ car } \frac{\ln n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

   De ce fait $n^{3/2}u_n = \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^{3/2}u_n = 0$ donc $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ et la série $\sum u_n$ converge.

3. On pose $\theta_n = \left(1 - \dfrac{1}{n^3}\right)^{1/2}$ donc $u_n = \arccos(\theta_n) \in [0; \pi]$

   $\theta_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et de ce fait $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sin(u_n)$ or $\sin(u_n) = \sqrt{1 - \cos^2(u_n)}$ car $u_n \in [0; \pi]$ et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{3/2}}$ d'où la convergence de la série.

EXERCICE 3 :

$$(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} (\sqrt{3})^k (1+(-1)^k) = a_n.$$

Dans a_n les termes de rang impair sont nuls donc,

$$a_n = \sum_{0 \leqslant s \leqslant [n/2]} \binom{n}{2s} 2^{n-2s+1} 3^s \ (1+(-1)^{2s}=2)$$

$$\text{donc } a_n = 2 \sum_{0 \leqslant s \leqslant [n/2]} \binom{n}{2s} 2^{n-2s} 3^s \text{ et } a_n \in 2\mathbb{N}$$

$u_n = \sin[\pi(2+\sqrt{3})^n] = \sin[\pi(a_n - (2-\sqrt{3})^n] = -\sin[\pi(2-\sqrt{3})^n]$ car $\sin(2k\pi - x) = \sin(-x) = -\sin(x)$

Or $0 < 2-\sqrt{3} < 1$ donc $(2-\sqrt{3})^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\pi(2-\sqrt{3})^n$ (suite géométrique négative de raison comprise entre -1 et 1)

Ainsi $u_n < 0$ et $\sum u_n$ converge.

EXERCICE 4 :

$u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ avec $n \geqslant 1$.

$w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} u_k u_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k}} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$

Et $|w_n| = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \Rightarrow |w_n| \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n \times n}} \Rightarrow |w_n| \geqslant \frac{n-1}{n}$ avec $\dfrac{n-1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc w_n ne tend pas vers 0.

$\sum w_n$ diverge grossièrement.

Remarque 1 $k - 2\sqrt{k(n-k)} + n - k = (\sqrt{k} - \sqrt{n-k})^2 \geqslant 0$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \geqslant \dfrac{2}{n}$ et on peut donc minorer $|w_n|$ par $\dfrac{2(n-1)}{n}$ qui tend vers 2.

Remarque 2 $\sum w_n$ est le produit de Cauchy de la série $\sum u_n$ par elle-même. $\sum u_n$ converge car c'est une série alternée qui remplit les conditions du critère de Leibniz. En revanche, elle n'est pas absolument convergente (Riemann 1/2) donc le théorème sur le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes ne s'applique pas.

EXERCICE 5 :

$(E) : x^n e^x = 1$.

1. On pose $f_n(x) = x^n e^x - 1$ pour $x \geqslant 0$ et on obtient $f_n'(x) = x^{n-1} e^x (x+n)$.
   $x_0 = 0$ seule racine de $e^x = 1$.
   Pour $n \geqslant 1$, on obtient le tableau suivant :

x	0	a_n	1	$+\infty$
Signe de $f_n'(x)$		$+$		
Variations de f	-1 ↗	0 ↗	$e-1$ ↗	$+\infty$

f_n continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$, $f_n(0)=-1$ et $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, le théorème de la bijection assure l'existence d'un unique $a_n>0$ tel que $f_n(a_n)=0$.
$f_n(1)=\mathrm{e}-1>0=f_n(a_n)$ donc $a_n<1$. (f_n strictement croissante sur $[0;+\infty[$)

2. $f_{n+1}(a_n)=a_n^{n+1}\mathrm{e}^{a_n}-1=a_n-1$ et $a_n-1<0$, or $0=f_n(a_n)$ donc $a_n<a_{n+1}<1$. On peut donc dire que (a_n) est croissante et majorée par 1 donc elle converge vers une limite l qui vérifie $l\leqslant 1$.

3. Si $n\geqslant 1$, $a_n>0$ et $f_n(a_n)=0 \Leftrightarrow n\ln(a_n)+a_n=0$. Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n<1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(a_n)=\ln(l)<0$ et $n\ln(a_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Or $a_n=-n\ln(a_n)$ et on aurait donc $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, contradiction avec la question précédente donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=1$

   $a_n=-n\ln(a_n)=-n\ln(1+a_n-1) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n(a_n-1)$. $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ d'où $a_n-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n}$ et $\sum(a_n-1)$ diverge.

EXERCICE 6 :

$u_n=\dfrac{(-1)^n}{n+\frac{(-1)^n}{\ln(n)}}$. u_n est défini pour $n\geqslant 2$ et si $n\geqslant 3$, $n+\dfrac{(-1)^n}{\ln(n)}>0$. (en effet $\ln(n)>1$ et donc $\dfrac{1}{\ln(n)}<1$ pour $n\geqslant 3$)

Pour $n\geqslant 2$, u_n a le signe de $(-1)^n$ c'est à dire que $\sum u_n$ est alternée et

$$|u_n|=\frac{1}{n+\frac{(-1)^n}{\ln(n)}} \text{ donc } |u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \text{ avec } \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$$

La décroissance de $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est diffcile à établir donc l'équivalence précédente donne l'idée de considérer la différence $u_n-\dfrac{(-1)^n}{n}$.

Pour $n\geqslant 2$, $u_n-\dfrac{(-1)^n}{n}=\dfrac{(-1)^n}{n\left(n+\frac{(-1)^n}{\ln(n)}\right)}\left[n-n-\dfrac{(-1)^n}{\ln(n)}\right]=\dfrac{-1}{n\ln(n)\left[n+\frac{(-1)^n}{\ln(n)}\right]}$ donc $u_n-\dfrac{(-1)^n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{n^2\ln(n)}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2}{n^2\ln(n)}=0$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 2}\dfrac{1}{n^2\ln(n)}$ est convergente.

Par comparaison de la nature entre séries équivalentes de signe fixe (ici négatif) $\sum\limits_{n\geqslant 2}\left(u_n-\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ converge.

Or $u_n=\left(u_n-\dfrac{(-1)^n}{n}\right)+\dfrac{(-1)^n}{n}$ et $\sum\dfrac{(-1)^n}{n}$ converge, ainsi

$$\sum_{n\geqslant 2} u_n \text{ est convergente (somme de séries convergentes).}$$

EXERCICE 7 :

$\sum u_n$ avec $u_n=(-1)^n\dfrac{n^2+n+1}{2^n}$.

$|u_n|=\dfrac{n^2+n+1}{2^n}$ et $\dfrac{n^2+n+1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^2}{2^n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2}{2^n}=0$.

$\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{n^2+3n+3}{n^2+n+1}$ et $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}-1=\dfrac{-n^2+n+1}{2(n^2+n+1)}$.

Or $-n^2+n+1=\dfrac{5}{4}-\left(n-\dfrac{1}{2}\right)^2$, ce qui permet de dire que si $n\geqslant 2$, $-n^2+n+1<0$ et donc $|u_{n+1}|<|u_n|$, ce qui implique que $(|u_n|)_{n\geqslant 2}$ est décroissante.

$\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ satisfait au critère spécial des séries alternées donc elle est convergente.

Remarque 3 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{1}{2} < 1$ donc on obtient la convergence absolue de $\sum u_n$ par le critère de d'Alembert.

Calcul de la somme S : on remarque que $n^2+n+1 = n(n-1)+2n+1$

$$S = \sum_0^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2+2n+1}{2^n} = \sum_0^{+\infty} n(n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2\sum_0^{+\infty} n\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \sum_0^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

Si l'on considère connues les sommes suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad ; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad ; \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

On obtient $S = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{2}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^3} + 2\left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{10}{27}$

Remarque 4 Sommes précédentes : Le point de départ est $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, avec $x \in]-1;+1[$

$(1-x)\displaystyle\sum_{n=1}^{p} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{p} nx^{n-1} - \sum_{n=1}^{p} nx^n = \sum_{n=0}^{p-1}(n+1)x^n - \sum_{n=1}^{p} nx^n = \sum_{n=0}^{p-1} x^n - px^p$, on fait tendre p vers $+\infty$, donc $px^p \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ puisque $|x|<1$ et l'on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Même démarche à partir de $(1-x)\displaystyle\sum_{n=2}^{p} n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=2}^{p} n(n-1)x^{n-2} - \sum_{n=2}^{p} n(n-1)x^{n-1} = \sum_{n=1}^{p-1}(n+1)nx^{n-2} - \sum_{n=2}^{p} n(n-1)x^{n-1} = 2 - p(p-1)x^{p-1} + 2\sum_{n=2}^{p-1} nx^{n-1}$

On fait tendre p vers $+\infty$ et l'on divise par $1-x$,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{1-x}\left(1 + \frac{1}{(1-x)^2} - 1x^0\right) = \frac{2}{(1-x)^3}$$