EXERCICE 1 :

Calculer $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(n+1)x^n$ lorsque $f(x)$ est définie.

Quelle est la nature de la série $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(n+1)$?

Prouver que $f(x)$ admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

Conclure.

EXERCICE 2 :

Résoudre l'équation différentielle $y''+y'+\mathrm{e}^{-2x}y=3\mathrm{ch}(x)+\mathrm{sh}(x)$

On posera $t=\mathrm{e}^{-x}$.

EXERCICE 3 :

Déterminer une solution particulière de (E) : $2xy'+y-3x\mathrm{ch}(x^{3/2})=0$, puis résoudre l'équation différentielle (E).

EXERCICE 4 :

On pose $a_n=\dfrac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}k.k!$.

Simplifier a_n et en déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0}a_nx^n$. Calculer la somme S de la série pour $x\in]-R;R[$. Donner un équivalent de S en R et en $-R$.

EXERCICE 5 :

On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}, \quad x\in\mathbb{R}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière.
2. On note S sa somme. Exprimer $(1-x^2)S'(x)$ en fonction de $S(x)$.
3. En déduire S.

EXERCICE 6 :

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{n!}{1.3.5\ldots(2n+1)}x^{2n+1}$.

Écrire une équation différentielle vérifiée par la somme f de la série entière et en déduire l'expression de f.

CORRECTIONS

EXERCICE 1 :

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{n+1} = \frac{x}{1+x}$ pour $|x|<1$.

  En dérivant la série entière sur l'intervalle $]-1,1[$, on obtient $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(n+1)x^n = \frac{1}{(1+x)^2} = f(x)$;

- $(-1)^n(n+1)$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, donc la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(n+1)$ diverge grossièrement ;

- $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2} \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} \dfrac{1}{4}$;

  Ce résultat illustre le fait que la continuité de la fonction f sur $[0;R]$ n'implique la converge de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n R^n$, alors que la réciproque est vraie.

EXERCICE 2 :

Résoudre l'équation différentielle $y'' + y' + \mathrm{e}^{-2x}y = 3\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x)$

Pour $t \in]0;+\infty[,\ t = \mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow x = -\ln(t)$.
Ainsi, $y(x) = y(-\ln(t)) = Y(t)$ et $Y'(t) = -\dfrac{1}{t}y'(x) \Leftrightarrow y'(x) = -tY'(t)$

De la même manière, on obtient $y''(x) = tY'(t) + t^2Y''(t)$.

$\triangleright$ Équation homogène : $(H) : y'' + y' + \mathrm{e}^{-2x} = 0 \Leftrightarrow tY'(t) + t^2Y''(t) - tY'(t) + t^2Y(t) = 0 \Leftrightarrow t^2(Y''(t) + Y'(t)) = 0$

L'équation homogène H devient donc puisque $t>0$, $Y''(t) + Y(t) = 0$, c'est une équation linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, dont l'équation caractéristique est $r^2+1=0$, les solutions sont donc de la forme

$$Y(t) = a\cos(t) + b\sin(t) \text{ soit } y(x) = a\cos(\mathrm{e}^{-x}) + b\sin(\mathrm{e}^{-x})$$

$\triangleright$ On recherche désormais une solution particulière de l'équation complète en t

$$t^2(Y''(t)+Y(t)) = 3\mathrm{ch}(-\ln(t)) + \mathrm{sh}(-\ln(t))$$
$$t^2(Y''(t)+Y(t)) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{t}+t\right) + \frac{1}{2}\left(-t+\frac{1}{t}\right)$$
$$Y''(t)+Y(t) = \frac{2}{t^3} + \frac{1}{t}$$

Une solution évidente apparaît : $Y(t) = \dfrac{1}{t}$ et la solution générale en t est $Y(t) = a\cos(t) + b\sin(t) + \dfrac{1}{t}$, ce qui donne en x

$$\boxed{y(x) = a\cos(\mathrm{e}^{-x}) + b\sin(\mathrm{e}^{-x}) + \mathrm{e}^{x}} \quad (a,b)\in\mathbb{R}^2$$

EXERCICE 3 :

$\triangleright$ On pose $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence R ($R>0$).

$\forall x \in]-R;R[,\ y'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$.

y solution de $(E) \Leftrightarrow 2xy'(x) + y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^n$

D'autre part, pour $x \geqslant 0$, $\text{ch}(x^{3/2}) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^{3/2})^n}{(2n)!}$ (le rayon de convergence de $\text{ch}(x)$ est $+\infty$ mais $x^{3/2}$ définie pour $x \in \mathbb{R}^+$)

$\forall x \geqslant 0,\ 3x\text{ch}(x^{3/2}) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3x^{3n+1}}{(2n)!}$

y est solution de (E) si, et seulement si $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{3n} = a_{3n+2} = 0$ et $a_{3n+1} = \dfrac{3}{(2n)!(2(3n+1)+1)} = \dfrac{3}{(2n)!(6n+3)}$.

On obtient donc $a_{3n+1} = \dfrac{1}{(2n+1)!}$ et $\forall x \geqslant 0,\ y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{(2n+1)!}$ (série lacunaire)

On évalue son rayon de convergence par la règle de d'Alembert

$$\left|\frac{a_{3n+4}x^{3n+4}}{a_{3n+1}x^{3n+1}}\right| = \frac{|x|^3}{(2n+3)(2n+2)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{donc le rayon de convergence est } +\infty.$$

Pour $x \neq 0$, $\sqrt{x}y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+3/2}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^{3/2})^{2n+1}}{(2n+1)!}$ donc pour $x > 0$, $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\text{sh}(x^{3/2})$.

▷ On cherche maintenant les solutions de l'équation homogène $(H) :\ 2xy' + y = 0$.

Sur $]0;+\infty[$, $\quad (H) \Leftrightarrow y' = -\dfrac{y}{2x} \Leftrightarrow y = \dfrac{C}{\sqrt{x}} \quad (C \in \mathbb{R})$

On en déduit les solutions de l'équation (E) qui sur $]0;+\infty[$ sont

$$\boxed{y(x) = \frac{C}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\text{sh}(x^{3/2})}\ (C \in \mathbb{R})$$

EXERCICE 4 :

$\forall k \geqslant 1,\ k.k! = (k+1-k).k!$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \dfrac{1}{n!}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)! - \sum_{k=1}^{n} k!\right) = \dfrac{1}{n!}((n+1)! - 1!) = n + 1 - \dfrac{1}{n!}$.

(on peut poser $a_0 = 0 + 1 - \dfrac{1}{0!} = 0$).

$a_n \underset{+\infty}{\sim} n$ donc $R = 1$.

$\forall x \in]-1;1[,\ S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$ (écriture possible car les deux séries convergent)

$\forall x \in]-1;1[,\ S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} \Longrightarrow \forall x \in]-1;1[, S(x) = \frac{1}{(1-x)^2} - \mathrm{e}^x$

Équivalent de S en R et en $-R$:

- $x \to 1,\ S(x) \underset{1}{\sim} \dfrac{1}{(1-x)^2}$
- $x \to -1,\ S(x) \underset{-1}{\sim} \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$

EXERCICE 5 :

On pose $u_n(x) = \dfrac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière.

- Si $x = 0$, $u_n(0)$ converge ;
- Si $x \neq 0$, $u_n(x)$ est non nul et $\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \dfrac{4(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)}x^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} x^2$.

  D'après la règle de d'Alembert, $\sum u_n(x)$ converge absolument si $|x| < 1$ et diverge si $|x| > 1$. On obtient donc $\boxed{R = 1}$

2. On note S sa somme. Exprimer $(1 - x^2)S'(x)$ en fonction de $S(x)$.

$$\forall x \in]-1;1[,\ S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}x^{2n} \qquad \left(\frac{2n+1}{(2n+1)!} = \frac{1}{(2n)!}\right)$$
$$(1-x^2)S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}x^{2n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n((n-1)!)^2}{(2n-2)!}x^{2n} \quad (\text{décalage indice et } \times x^2)$$
$$(1-x^2)S'(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^{n-1}((n-1)!)^2}{(2n)!}[4n^2 - 2n(2n-1)]x^{2n} \quad (\text{isoler 1 et regrouper les 2 sommes})$$
$$(1-x^2)S'(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^{n-1}((n-1)!)^2}{(2n)!}2nx^{2n}$$
$$(1-x^2)S'(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^{n-1}((n-1)!)^2}{(2n-1)!}x^{2n}$$
$$(1-x^2)S'(x) = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+2} \quad (\text{décalage indice})$$
$$(1-x^2)S'(x) = 1 + xS(x) \quad (E)$$

3. En déduire S.

(E) est une équation différentielle linéaire du premier ordre non homogène. L'équation homogène associée est :

$$(H) : \quad (1-x^2)y' = xy$$

Pour tout $x \in]-1;1[$, les solutions de (H) sont de la forme $x \longmapsto \dfrac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

(une primitive de $x \longmapsto \dfrac{x}{1-x^2}$ est la fonction $x \longmapsto -\dfrac{1}{2(1-x^2)}$ sur $]-1;1[$)

Pour déterminer une solution particulière de l'équation complète (E), on utilise la méthode de variation de la constante : pour $x \in]-1;1[$, on pose $y_P(x) = \dfrac{\lambda(x)}{\sqrt{1-x^2}}$

y_P solution de $(E) \Leftrightarrow (1-x^2)y_P'(x) = 1 + xy_P(x) \Leftrightarrow \lambda'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. On choisit par exemple, $y_P(x) = \arcsin(x)$.

Les solutions de (E) sont donc de la forme

$$\forall x \in]-1;1[,\ y(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}},\ \text{or } y(0) = 0\ (\textit{avec la série}) \Rightarrow \lambda = 0 \text{ et de ce fait } S(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

EXERCICE 6 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \dfrac{n!}{1.3.5\ldots(2n+1)}x^{2n+1}$ et $u_n(x) = a_n x^{2n+1}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \dfrac{n+1}{2n+3}x^2$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \dfrac{x^2}{2}$ et le rayon de convergence est $R = \sqrt{2}$.

Pour $x \in \left]-\sqrt{2};\sqrt{2}\right[,\ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$

On obtient donc

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n}$$

Avec les coefficients a_n, on écrit la relation $(2n+3)a_{n+1}=(n+1)a_n \quad (\bigstar)$ ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \left]-\sqrt{2};\sqrt{2}\right[,\ f'(x) &= 1+\sum_{n=1}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n}\\
&= 1+\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+3)a_{n+1}x^{2n+2} \quad (\textit{indexation par } n-1)\\
&= 1+\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_n x^{2n+2} \quad (\textit{compte}-\textit{tenu de } (\bigstar))\\
&= 1+\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{2n+2}+\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+2}\\
&= 1+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n+2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^{2n+2} \quad \left(\frac{1}{2}(2n+1)+\frac{1}{2}=n+1\right)\\
f'(x) &= 1+\frac{1}{2}x^2 f'(x)+\frac{1}{2}xf(x)
\end{aligned}$$

f est solution de l'équation différentielle $xy+(x^2-2)y'+2=0$.

- On note $(H):\ xy+(x^2-2)y'=0$;
  Sur $]-\sqrt{2};\sqrt{2}[$, $(H) \Leftrightarrow$ $y'=-\frac{1}{2}\times\frac{-2x}{2-x^2}y$ dont les solutions sont $y(x)=\frac{\lambda}{\sqrt{2-x^2}}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$;
- Par la méthode de variations de la constante, en posant $y(x)=\lambda(x)(2-x^2)^{-1/2}$, on obtient
  $\lambda'(x)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}}$ et une solution est $y(x)=2\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$;
- La solution générale sur $]-\sqrt{2};\sqrt{2}[$, est $y(x)=\frac{2}{\sqrt{2-x^2}}\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+\frac{\lambda}{\sqrt{2-x^2}}$

$f(0)=0 \Longrightarrow \lambda=0$ et l'on obtient $\boxed{f(x)=\frac{2}{\sqrt{2-x^2}}\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{n!}{1.3.5\ldots(2n+1)}x^{2n+1}}$ $\quad x\in]-\sqrt{2};\sqrt{2}[$