EXERCICE 1 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\quad ||A|| = \sup_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

1. Montrer que $||.||$ est une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que si λ est valeur propre de A alors $|\lambda| \leqslant ||A||$.

EXERCICE 2 :

Soit N_1 et N_2 deux normes sur un $\mathbb{R}-$espace vectoriel E.

On note $B_1 = \{x \in E, N_1(x) \leqslant 1\}$ et $B_2 = \{x \in E, N_2(x) \leqslant 1\}$.

Montrer que $B_1 = B_2 \Rightarrow N_1 = N_2$.

EXERCICE 3 :

$$N : \mathbb{R}^2 \longrightarrow R$$
$$(x, y) \longmapsto N(x, y) = \sup_{t \in [0,1]} |x + ty|$$

Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Représenter la boule fermée de centre 0 et de rayon 1.

EXERCICE 4 :

Montrer que la suite de terme général complexe (z_n) définie par la relation de récurrence $z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(z_n + |z_n|)$ converge.

EXERCICE 5 :

On munit $E = \left\{f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}), f(0) = 0\right\}$ de la norme $||f||_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$.

1. Montrer que $N(f) = ||3f + f'||_\infty$ est une norme sur E.
2. Montrer que $f(x)\mathrm{e}^{3x} = \displaystyle\int_0^x (3f(t) + f'(t))\mathrm{e}^{3t} \mathrm{d}t$ et en déduire qu'il existe une $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $||f||_\infty \leqslant kN(f)$.
3. N et $||.||_\infty$ sont-elles équivalentes ?

EXERCICE 6 :

Ensemble de définition et dérivabilité de $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-xt^2}}{t^2} \,\mathrm{d}t$.

En déduire que $\forall x \in [0; +\infty[$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-xt^2}}{t^2} \,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi x}$.

Retrouver ce résultat par changement de variable puis intégration par parties.

EXERCICE 7 :

Existence, continuité, dérivabilité de $g : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1 + t^2} \,\mathrm{d}t$.

Calculer l'expression de $g(x)$.

EXERCICE 8 :

On pose

$$F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est définie et continue sur $[0;+\infty[$, puis déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$.
2. Montrer que F est dérivable sur $[0;+\infty[$ et démontrer que
$$F'(x)=-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u$$
3. En intégrant F' sur $[0;+\infty[$, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Corrections

EXERCICE 1 :

$$||A|| = \sup_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

1. L'application $||.||$ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
   - $A = 0 \Rightarrow ||A|| = 0$ et, $||A|| = 0 \Longrightarrow \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = 0 \Leftrightarrow \forall (i, j) \in \{1, 2, \ldots, n\}^2, |a_{ij}| = 0 \Leftrightarrow \forall (i, j) \in \{1, 2, \ldots, n\}^2, a_{ij} = 0$, ainsi la matrice A est nulle.
   - Soit $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tel que , $||\lambda A|| = \sum_{j=1}^{n} |\lambda a_{i_0 j}| = |\lambda| \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0 j}| = |\lambda|\, ||A||$
   - $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \sum_{j=1}^{n} |a_{ij} + b_{ij}| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| + \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| \leqslant \sup_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| + \sup_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| = ||A|| + ||B||$
   l'inégalité précédente est vérifiée pour tout i, en particulier pour celui qui réalise le maximum donc
   $$||A + B|| \leqslant ||A|| + ||B||$$

   $||.||$ est une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Montrer que si λ est valeur propre de A alors $|\lambda| \leqslant ||A||$.

   λ valeur propre de A donc il existe $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$. On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $|x_{i_0}| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i| \neq 0$.

   $\lambda X = AX \Leftrightarrow \lambda x_{i_0} = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} x_j \Rightarrow |\lambda||x_{i_0}| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0 j}||x_j| \leqslant |x_{i_0}| \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0 j}| \leqslant |x_{i_0}|\, ||A||$, ce qui implique que $|\lambda| \leqslant ||A||$ (simplification par $|x_{i_0}|$ qui est non nul)

EXERCICE 2 :

Soit $x \neq 0$ appartenant à E. $\dfrac{x}{N_2(x)} \in B_2$ car $N_2\left(\dfrac{x}{N_2(x)}\right) = 1$. De plus, $B_2 = B_1$ donc $\dfrac{x}{N_2(x)} \in B_1$, ce qui implique que $N_1\left(\dfrac{x}{N_2(x)}\right) \leqslant 1 \Leftrightarrow \dfrac{N_1(x)}{N_2(x)} \leqslant 1 \Leftrightarrow N_1(x) \leqslant N_2(x)$.

On établit de la même manière que $N_2(x) \leqslant N_1(x)$ et l'on obtient l'égalité.

Pour $x = 0$, $N_1(0) = 0 = N_2(0)$. (puisque N_1 et N_2 sont des normes)

Ce qui prouve que si deux normes coïncident sur la boule unité fermée alors elles sont égales sur E.

EXERCICE 3 :

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $N(x, y) \geqslant 0$;
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. $N(\lambda x, \lambda y) = \sup_{t\in[0,1]} |\lambda x + \lambda t y| = \sup_{t\in[0,1]} (|\lambda||x + ty|)$

  Compte-tenu de la définition de N, $N(x, y) \geqslant |x + ty|$ pour $t \in [0, 1]$, et donc $|\lambda| N(x, y) \geqslant |\lambda||x + ty| \Leftrightarrow |\lambda| N(x, y) \geqslant |\lambda x + t\lambda y|$. La dernière inégalité et la propriété du sup implique que $|\lambda| N(x, y) \geqslant N(\lambda x, \lambda y)$ (1)

  De la même manière, $N(\lambda x, \lambda y) \geqslant |\lambda||x + ty|$ pour tout $t \in [0, 1]$ (définition de N), ce qui s'écrit également $\dfrac{1}{|\lambda|} N(\lambda x, \lambda y) \geqslant |x + ty|$ et toujours par propriété du sup, on obtient :
  $\dfrac{1}{|\lambda|} N(\lambda x, \lambda y) \geqslant N(x, y) \Leftrightarrow N(\lambda x, \lambda y) \geqslant |\lambda| N(x, y)$ (2)

  D'après (1) et (2), on obtient, pour $\lambda \neq 0$, $N(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| N(x, y)$. Si $\lambda = 0$, $N(\lambda x, \lambda y) = N(0, 0) = 0$.

- $N((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) = N(x_1+x_2, y_1+y_2)$.
  $\forall t \in [0,1]$, $|x_1+x_2+t(y_1+y_2)| \leqslant |x_1+ty_1| + |x_2+ty_2| \leqslant N(x_1,y_1)+N(x_2,y_2)$, on a donc
  $$N((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) \leqslant N(x_1,y_1)+N(x_2,y_2)$$
- $N(x,y)=0 \Longrightarrow \forall t\in[0,1], |x+ty|=0 \Longrightarrow \forall t \in [0,1], x+ty=0$
  Avec $t=0$, on obtient $x=0$ et avec $t=1$, $y=0$. Ainsi $N(x,y)=0 \Rightarrow x=y=0$.

N est bien une norme.

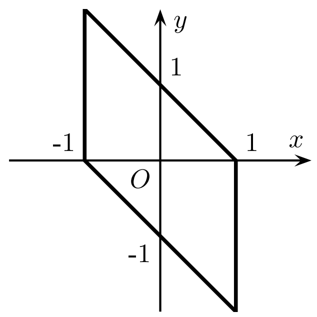
On note $BF(0,1)$ la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 et $\sup\limits_{t\in[0,1]} |x+ty| \leqslant 1 \Leftrightarrow \forall t\in[0,1], |x+ty|\leqslant 1$

$(x,y)\in BF(0,1) \Longrightarrow (-x,-y)\in BF(0,1)$ (en effet $|x+ty| = |-x-ty|$)

Ainsi, on peut supposer $y>0$, la fonction $t \longmapsto x+ty$ est strictement croissante sur $[0,1]$ et $x \leqslant x+ty \leqslant x+y$, de sorte que :

$$\sup_{t\in[0,1]} |x+ty| = \max(|x|,|x+y|) = \begin{cases} x+y & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \geqslant -y \\ -x & \text{si } -y<x<0 \quad \text{et si } x+y<-x \\ x+y & \text{si } -y<x<0 \quad \text{et si } x+y \geqslant -x \end{cases}$$

En définitive, $(x,y)\in BF(0,1) \Leftrightarrow |x+y|\leqslant 1$ et $|x|\leqslant 1$, d'où le dessin de la boule unité :



EXERCICE 4 :

Pour tout n, $|z_{n+1}| = \dfrac{1}{2}|z_n + |z_n|| \leqslant \dfrac{1}{2}(|z_n|+|z_n|) = |z_n|$ donc la suite (r_n) où $r_n = |z_n|$ est décroissante et positive donc convergente de limite $r \geqslant 0$.

$z_n = x_n + \mathrm{i}\, y_n$ avec $(x_n,y_n)\in\mathbb{R}^2$.

$$x_{n+1} + \mathrm{i}\, y_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \mathrm{i}y_n + \sqrt{x_n^2+y_n^2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n + \sqrt{x_n^2+y_n^2}) \\ \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{2}y_n \end{cases}$$

- (y_n) est géométrique de raison $1/2$ (strictement compris entre 0 et 1) donc elle converge et sa limite vaut 0.
- Si $x_n \geqslant 0$ alors $x_{n+1}\geqslant 0$. De plus $\sqrt{x_n^2+y_n^2} \geqslant |x_n|\,(\bigstar)$ et si $x_n<0$, $|x_n| = -x_n$, donc $\sqrt{x_n^2+y_n^2}\geqslant -x_n \Leftrightarrow x_{n+1}\geqslant 0$. Ainsi $x_n \geqslant 0, \forall n\geqslant 1$.
  $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_{n+1}-x_n = \dfrac{1}{2}(-x_n + \sqrt{x_n^2+y_n^2}) \geqslant 0$ (toujours $(\bigstar)$) donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
  Par continuité de la fonction $x\longmapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$, $x_n^2+y_n^2 = r_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} r^2$, et $y_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

  d'où $x_n^2 = r_n^2 - y_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} r^2$

  Par continuité de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^+$, $|x_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} r$, et comme $x_n \geqslant 0$ si $n\geqslant 1$, $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} r$.
- $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} r$ et $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ impliquent que $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} r + \mathrm{i}\,0 = r$.

EXERCICE 5 :

1. • N définie sur E, est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
   • $N(f) = 0 \Leftrightarrow 3f + f' = 0$ car $||.||_\infty$ est une norme ; $3f + f' = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = k\mathrm{e}^{-3x}$. Or $f \in E$ donc $f(0) = 0 \Rightarrow k = 0$ et f est nulle. Ainsi $N(f) = 0 \Rightarrow f = 0$.

   • $\forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda f) = ||3\lambda f + \lambda f'||_\infty = ||\lambda(3f + f')||_\infty \underset{||.||_\infty\, norme}{=} |\lambda|||3f + f'||_\infty = |\lambda|N(f)$.

   • $\forall (f, g) \in E^2, N(f + g) = ||3(f + g) + (f' + g')||_\infty = ||3f + f' + 3g + g'||_\infty \underset{||.||_\infty\, norme}{\leqslant} ||3f + f'||_\infty + ||3g + g'||_\infty$ et donc $N(f + g) \leqslant N(f) + N(g)$.

   N est bien une norme sur E.

2. $v(t) = f(t)\mathrm{e}^{3t}$, $v'(t) = (f'(t) + 3f(t))\mathrm{e}^{3t}$. f est de classe $\mathcal{C}^1$ donc v' est continue et d'après le théorème fondamental d'intégration
$$\int_0^x (f'(t) + 3f(t))\mathrm{e}^{3t}\mathrm{d}t = f(x)\mathrm{e}^{3x} - f(0) = f(x)\mathrm{e}^{3x}.$$
$$\begin{aligned}
\forall x \in [0, 1],\ f(x)\mathrm{e}^{3x} &= \int_0^x (f'(t) + 3f(t))\mathrm{e}^{3t}\mathrm{d}t \\
\Rightarrow |f(x)|\mathrm{e}^{3x} &\leqslant \int_0^x |f'(t) + 3f(t)|\mathrm{e}^{3t}\mathrm{d}t \\
\Rightarrow |f(x)|\mathrm{e}^{3x} &\leqslant \int_0^x N(f)\mathrm{e}^{3t}\mathrm{d}t \\
\Leftrightarrow |f(x)|\mathrm{e}^{3x} &\leqslant N(f)\left(\frac{\mathrm{e}^{3x} - 1}{3}\right) \\
\Leftrightarrow |f(x)| &\leqslant N(f)\left(\frac{1 - \mathrm{e}^{-3x}}{3}\right) \\
\Rightarrow |f(x)| &\leqslant \frac{1}{3}N(f)
\end{aligned}$$
car $\mathrm{e}^{-3x} > 0$, Ainsi $||f||_\infty \leqslant \dfrac{1}{3}N(f)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall t \in [0, 1], f_n(t) = t^n$. f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f_n(0) = 0$ donc $f_n \in E$.

   $N(f_n) = \sup\limits_{t\in[0,1]} |3t^n + nt^{n-1}|$ et si l'on pose $g : t \longmapsto 3t^n + nt^{n-1}$, $g'(t) = nt^{n-2}(3t + n - 1)$. $\forall t \in [0, 1]$ et $n \geqslant 2$, $g'(t) \geqslant 0$ donc g est croissante sur $[0, 1]$ et donc $g(1)$ est le maximum de g sur $[0, 1]$ pour $n \geqslant 2$. $(N(f_1) = 4)$. On a donc $N(f_n) = g(1) = 3 + n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

   Si l'on suppose N et $||.||_\infty$ équivalentes alors il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall f \in E, N(f) \leqslant \alpha||f||_\infty$, ce qui s'écrirait avec la fonction f_n : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $3 + n \leqslant \alpha$. Or $(3 + n)_{n\geqslant 1}$ ne peut pas être majorée par α car $3 + n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc N et $||.||_\infty$ ne sont pas équivalentes.

EXERCICE 6 :

Ensemble de définition et dérivabilité de $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-xt^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

On note $f_x : t \longmapsto \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-xt^2}}{t^2}$. f_x est définie et continue sur $]0; +\infty[$.

- Pour $x = 0$, $f_0(t) = 0$ et f_0 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$;

- Pour $x \neq 0$, $1 - \mathrm{e}^{-xt^2} \underset{t\to 0}{\sim} xt^2$ donc $f_x(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} x$ et f_x est prolongeable par continuité en 0 en posant $f_x(0) = 0$. (le problème de l'intégrabilité en 0 est réglé)

$\left|\dfrac{1-\mathrm{e}^{-xt^2}}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{2}{t^2}$ pour $t \geqslant 1$ et la fonction $t \longmapsto \dfrac{2}{t^2}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$.
Ainsi f_x est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ si $x>0$.

- Pour $x<0$, $f_x(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

En conclusion, $D_{f_x} = [0;+\infty[$.

■■■

$\forall (x,t) \in [0;+\infty[\times]0;+\infty[$, on pose $h(x,t) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-xt^2}}{t^2}$.

- h est continue sur $[0;+\infty[\times]0;+\infty[$; (quotient de fonctions continues et $t^2 \neq 0$)
- Soit $a>0$, $\forall (x,t) \in [0;a]\times]0;+\infty[$, $|h(x,t)| \leqslant \dfrac{1-\mathrm{e}^{-at^2}}{t^2}$
  en effet, $x \leqslant a \Rightarrow -xt^2 \geqslant -at^2 \Rightarrow\Rightarrow -\mathrm{e}^{-xt^2} \leqslant -\mathrm{e}^{-at^2}$.

  On a vu précédent que $t \longmapsto \dfrac{1-\mathrm{e}^{-at^2}}{t^2}$ était intégrable. L'hypothèse de domination est donc remplie, et l'on peut d'ores et déjà conclure à la continuité de $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-xt^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t$ sur $[0;+\infty[$.

■■■

$\forall (x,t) \in [0;+\infty[\times]0;+\infty[$, $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \mathrm{e}^{-xt^2}$.

- $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ est continue sur $[0;+\infty[\times]0;+\infty[$;
- Soit $a>0$, $\forall (x,t) \in [a;+\infty[\times]0;+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \mathrm{e}^{-at^2}$
  Comme $t \longmapsto \mathrm{e}^{-at^2}$ est continue, positive, intégrable sur $[0;+\infty[$, ce qui permet d'obtenir l'hypothèse de domination locale sur $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$ pour $\dfrac{\partial h}{\partial x}$.

  On peut donc conclure que $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-xt^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x>0$:
  $$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt^2}\,\mathrm{d}t \underset{u=t\sqrt{x}}{=} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$
  Il s'en suit que $f(x) = \sqrt{\pi x} + C$ pour $x>0$. Or $f(0)=0$ donc $C=0$, et $\forall x \geqslant$, $f(x) = \sqrt{\pi x}$.

EXERCICE 7 :

$t \longmapsto \dfrac{\cos(tx)}{1+t^2}$ est continue sur $[0;+\infty[$.

On remarque que g est paire (cosinus) et $g(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

On peut donc restreindre l'étude de $g(x)$ à $x>0$.

$\dfrac{|\cos(tx)|}{1+t^2} \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$ d'où l'intégrabilité de $t \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2}$ sur $[0;+\infty[$ pour tout $x>0$.

Par l'intermédiaire d'un changement de variable, on obtient : $g(x) \underset{t=\frac{u}{x}}{=} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(u)}{1+\frac{u^2}{x^2}}\,\mathrm{d}u = x\int_0^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u^2+x^2}\,\mathrm{d}u$

$\forall (x,u) \in]0;+\infty[\times[0;+\infty[$, on pose $f(x,u)=\dfrac{\cos(u)}{u^2+x^2}$.

- $x \longmapsto f(x,u)$ est continue sur $]0;+\infty[$ ($u^2+x^2>0$) ;
- $u \longmapsto f(x,u)$ est continue sur $]0;+\infty[$;
- Soit a et b tels que, $[a,b]\subset]0;+\infty[$
$$\forall (x,u)\in[a,b]\times]0;+\infty[,\ |f(x,u)|\leqslant \frac{1}{a^2+u^2}$$
et $u\longmapsto \dfrac{1}{a^2+u^2}$ est positive, continue, et intégrable sur $[0;+\infty[$.

  Ainsi g est continue sur $]0;+\infty[$.

■■■

$\forall (x,u) \in]0;+\infty[\times[0;+\infty[$, on pose $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,u)=\dfrac{-2x\cos(u)}{(u^2+x^2)^2}$.

- $x \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,u)$ est continue sur $]0;+\infty[$ ($u^2+x^2>0$) ;
- $u \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,u)$ est continue sur $]0;+\infty[$;
- Soit a et b tels que, $[a,b]\subset]0;+\infty[$
$$\forall (x,u)\in[a,b]\times]0;+\infty[,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,u)\right|\leqslant \frac{2b}{(a^2+u^2)^2}$$
et $u\longmapsto \dfrac{2b}{(a^2+u^2)^2}$ est positive, continue, et intégrable sur $[0;+\infty[$.

  Ainsi $x\longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(u)}{u^2+x^2}\,\mathrm{d}u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et par produit g également. $\forall x>0$,
$$g'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos(u)}{u^2+x^2}\,\mathrm{d}u-2x^2\int_0^{+\infty}\frac{\cos(u)}{(u^2+x^2)^2}\mathrm{d}u\ (1)$$
pour des raisons déjà évoquées plus haut, $u\longmapsto\dfrac{\cos(u)}{(u^2+x^2)^2}$ est intégrable sur $[0;+\infty[$, et
$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos(u)}{(u^2+x^2)^2}\mathrm{d}u\underset{u=tx}{=}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(tx)x}{x^4(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x^3}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(tx)}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x^3}h(x)\ (2)$$
On applique le théorème de dérivation, déjà appliqué plus haut, à la fonction h en détaillant seulement la domination de $\dfrac{\partial k}{\partial x}:(x,t)\longmapsto -\dfrac{t\sin(tx)}{(t^2+1)^2}$
$$\forall (x,t)\in]0;+\infty[\times[0;+\infty[,\ \left|\frac{\partial k}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant\frac{t}{(t^2+1)^2}\text{ et }\frac{t}{(t^2+1)^2}\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{t^3}$$
donc la domination par une fonction intégrable sur $[0;+\infty[$ est réalisée de sorte que :
$$\forall x>0,\ h'(x)=-\int_0^{+\infty}\frac{t\sin(tx)}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t$$
Par une intégration par parties, on essaie d'exprimer $h'(x)$ en fonction de $g(x)$: $\forall x>0,\ h'(x)=-\dfrac{x}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(tx)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$.
(pour cela poser : $u:t\longmapsto\sin(tx)$, $u':t\longmapsto x\cos(tx)$, $v':t\longmapsto t(t^2+1)^{-2}$ et $v:t\longmapsto-\dfrac{1}{2}(t^2+1)^{-1}$; u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,X]$; faire tendre X vers $+\infty$)

$\forall x>0,\ h'(x)=-\dfrac{x}{2}g(x)$ puis $g'(x)=\dfrac{1}{x}g(x)-2x^2\dfrac{h(x)}{x^3}$ d'après (1) et (2), qui donne $g'(x)=\dfrac{g(x)}{x}-\dfrac{2}{x}h(x)$.

A ce stade, l'objectif est l'obtention d'une équation différentielle du second ordre vérifiée par g :
$\forall x>0, g''(x)=-\dfrac{1}{x^2}g(x)+\dfrac{g'(x)}{x}+\dfrac{2}{x^2}h(x)-\dfrac{2}{x}h'(x)\Leftrightarrow g''(x)=g(x)$ compte-tenu des expressions de $h(x)$ et de $h'(x)$.

Il existe donc a et b réels tels que $\forall x > 0$, $g(x) = a\mathrm{e}^{x} + b\mathrm{e}^{-x}$. $g(0) = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow a + b = \dfrac{\pi}{2}$.
De plus g est borné sur $\mathbb{R}$ car $|g(x)| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ et $g(x) \underset{+\infty}{\sim} a\mathrm{e}^{x}$ donc $a = 0$ et par suite $b = \dfrac{\pi}{2}$.
Ainsi pour $x > 0$, $g(x) = \dfrac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-x}$ et l'on obtient, compte-tenu de la parité de g : $g(x) = \dfrac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$

EXERCICE 8 :

1. La fonction $f : (x,t) \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}$ est continue sur $[0;+\infty[^2$.
   Pour tout $x \geqslant 0$ et $t \geqslant 0$,
   $$\left|\frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+t^2} \ (\textit{domination})$$
   La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue, positive et intégrable sur $[0;+\infty[$.
   Les conditions sont remplies pour conclure à la continuité de F sur $[0;+\infty[$.

   Pour tout $(x,t) \in [0;+\infty[^2$, $-x(1+t^2) \leqslant -x \Longrightarrow 0 \leqslant f(x,t) \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+t^2}$ et de ce fait, on obtient :
   $0 \leqslant F(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$, ce qui permet de conclure que $F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;+\infty[^2$ et pour tout $(x,t) \in [0;+\infty[^2$,
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}$$
   $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $[0;+\infty[^2$.

   Soit $a > 0$, pour tout $x \in [a;+\infty[$ et $t \geqslant 0$, $|-\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}| \leqslant \mathrm{e}^{-a(1+t^2)}$ (*domination*)
   La fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{-a(1+t^2)}$ est continue, positive et intégrable sur $[0;+\infty[$.
   Les conditions sont remplies pour conclure que F est ce classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;+\infty[$ et
   $$\text{Pour } x \geqslant 0,\ F'(x) = \int_0^{+\infty} -\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-x}\int_0^{+\infty} -\mathrm{e}^{-xt^2}\,\mathrm{d}t$$
   il ne reste plus qu'à effectuer le changement de variable $u = t\sqrt{x}$ et l'on obtient :
   $$F'(x) = -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u$$
3. En utilisant le théorème fondamental d'intégration, on peut écrire
   $$\int_0^{+\infty} F'(x) = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(0) = 0 - \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = -\frac{\pi}{4}$$
   L'expression de $F'(x)$ obtenue à la question précédente permet donc d'écrire
   $$\int_0^{+\infty} F'(x) = \int_0^{+\infty}\left(-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u\int_0^{+\infty} -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$
   Cela donne, après le changement de variable $u^2 = x$ dans la deuxième intégrale, la relation
   $$\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u\right) = \frac{\pi}{4} \text{ et par suite, } \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$