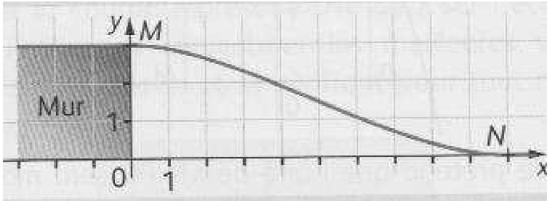
EXERCICE 1 **6 points**



On veut construire un tremplin sur une aire de jeu de façon à rejoindre deux points M et N.
Le point M est situé à 3 mètres de hauteur en haut d'un mur et le point N est situé à 10 mètres du pied du mur.

On se place dans un repère orthonormal dans lequel on a $M(0;3)$ et $N(10;0)$.

La fonction f, dont la courbe représentative modélise la forme du tremplin dans le repère choisi, est définie par :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad \text{où } a,\ b,\ c \text{ et } d \text{ sont des réels.}$$

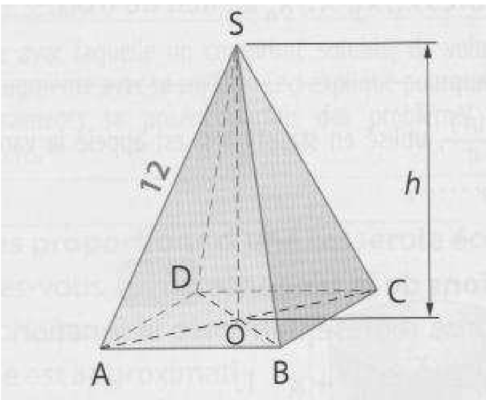
Le but de l'exercice est de trouver l'expression de f, c'est-à-dire de déterminer les réels a, b, c et d.

Le constructeur souhaite que le tremplin prenne appui sur le point M et sur le point N , mais aussi que *la tangente à la courbe représentative de f soit horizontale en ces 2 points* pour éviter les à-coups lors du passage d'un vélo par exemple.

1. Déterminer $f'(x)$, pour tout $x \in [0;10]$. ($f'(x)$ *s'exprimera en fonction de* a, b *et* c)
2. D'après les renseignements de l'énoncé, déterminer $f(0)$ et $f'(0)$. En déduire que $d = 3$ et $c = 0$.
3. En utilisant les renseignements liés au point N, montrer ensuite que les réels a et b vérifient le système
$$\begin{cases} 1000a + 100b & = -3 \\ 300a + 20b & = 0 \end{cases}$$
4. Déterminer enfin a et b. Conclure.

• ○ • ○ •

EXERCICE 2 **6 points**



Une pyramide de base carrée de centre O et de hauteur h (en cm) est telle que $SA = 12$ cm. Les triangles SOA, SOB, SOC et SOD sont rectangles en O.

1. Montrer que $AB^2 = 288 - 2h^2$
2. (a) On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'une pyramide est donnée par $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B} \times h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire de la base et h la hauteur de la pyramide.

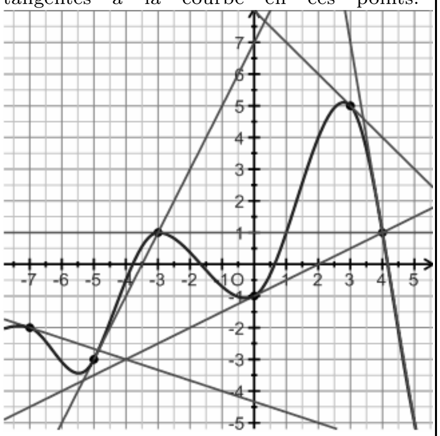
   Démontrez que, pour $0 \leq h \leq 12$, le volume $\mathcal{V}$ de la pyramide est défini par :
   $$\mathcal{V}(h) = -\frac{2}{3}h^3 + 96h\ .$$
   (b) Déterminer $\mathcal{V}'(h)$ pour $0 \leq h \leq 12$.

   (c) Pour quelle valeur de h le volume est-il maximal ? On donnera une valeur du volume en cm^3, arrondie au centième.

• ○ • ○ •

EXERCICE 3 **4 points**

Tout bonne réponse rapporte 1 point.
Une réponse erronée ou l'abscence de réponse n'enlève ni ne rapporte aucun point.
Recopier sur votre copie le numéro de la question et **la bonne réponse** a, b , c ou d.

		Réponse a	Réponse b	Réponse c	Réponse d
1	Si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})(2\pi)$ alors :	$C = D$	$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \pi(2\pi)$	$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0(2\pi)$	$\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AC}$
2(B)	Soit (E) l'équation d'inconnue réelle x : $$cos(x) + cos(2x) + cos(3x) = 3$$	(E) n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$	2π est solution de (E)	Si x est solution de (E), alors $x = 2\pi$	Si x est solution de (E) alors $\pi - x$ est aussi solution.
3	On donne ci-dessous la courbe d'une fonction f. Les points marqués sont à corrdonnées entières. Les droites sont tangentes à la courbe en ces points. 	$f'(-7) = \frac{1}{2}$	$f'(-7) = -\frac{1}{2}$	$f'(-7) = -\frac{1}{3}$	$f'(-7) = -2$
4	$f(x) = \frac{1}{x} + 3\sqrt{x}, \quad x > 0$ L'expression de $f'(x)$ est	$\frac{-2 + 3x\sqrt{x}}{2x^2}$	$\frac{-2\sqrt{x} + 3x^2}{2}$	$-\frac{1}{2x} + \frac{3}{2\sqrt{x}}$	$\frac{-2\sqrt{x} + 3x^2}{x^2 + 2\sqrt{x}}$
5	(u_n) est une suite géométrique de raison 2 et $u_1 = 3$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:	$u_n = 3 \times 2^n$	$u_n = 2 \times 3^n$	$u_n = 3 \times 2^{n-1}$	$u_n = 2 \times 3^{n-1}$

• ○ • ○ •

EXERCICE 4 **8 points**

$ABCD$ est un parallélogramme.
E est le point tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, I est le milieu de $[AB]$, J celui de $[DC]$.

On se place dans le repère (A, B, D)**.**

1. Compléter la figure de l'**ANNEXE 1**.
2. (a) Donner, par lecture graphique, les coordonnées des points A, B, C, D et I dans ce repère.

   (b) Montrer que les coordonnées du point E sont $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.
3. Démontrer que les points I, E et D sont alignés.
4. On admet que les coordonnées du point J sont $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

   (a) Montrer qu'une équation cartésienne de la droite (BJ) est
   $$x + \frac{1}{2}y - 1 = 0$$

   (b) Montrer que les droites (BJ) et (ID) sont parallèles.

   (c) Quelle est la nature du quadrilatère $BJDI$? Justifier.

5. (a) Soit F le point d'intersection des droites (BJ) et (AC). On supposera qu'une équation cartésienne de la droite (AC) est : $x - y = 0$
   Déterminer les coordonnées du point F.
   (b) Prouver que F est le milieu du segment $[EC]$

• ○ • ○ •

EXERCICE 5 **10 points**

Un volume constant de 2200 m^3 d'eau est réparti entre deux bassins A et B.
Le bassin A refroidit une machine. Pour des raisons d'équilibre thermique, on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de pompes.
On modélise les échanges entre les deux bassins de la façon suivante :

- au départ, les bassins A et B contiennent respectivement 800 m^3 et 1 400 m^3 d'eau.
- chaque jour, 15% du volume d'eau présent dans le bassin B au début de la journée est transféré vers le bassin A.
- chaque jour, 10% du volume d'eau présent dans le bassin A au début de la journée est transféré vers le bassin B.

Pour tout entier naturel n, on note a_n (respectivement b_n) le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin A (respectivement dans le bassin B) à la fin du $n^{ième}$ jour de fonctionnement.
On a donc $a_0 = 800$ et $b_0 = 1400$.

1. (a) Montrer que $a_1 = 930$ et $b_1 = 1270$.
   (b) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a :
   $$a_{n+1} = 0,9a_n + 0,15b_n.$$
   (c) Quelle est la valeur de $a_n + b_n$, pour tout entier naturel n ? Justifier.
   (d) Déduire des deux questions précédentes que, pour tout entier naturel n,
   $$a_{n+1} = 0,75a_n + 330$$
   (e) La suite (a_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = a_n - 1320$
   (a) Calculer u_0, u_1 et u_2.
   (b) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   (c) Exprimer u_n en fonction de n. En déduire que, pour tout entier naturel n, $a_n = 1320 - 520 \times (0,75)^n$.
   (d) Étudier le sens de variation de la suite (a_n) puis conjecturer sa limite.

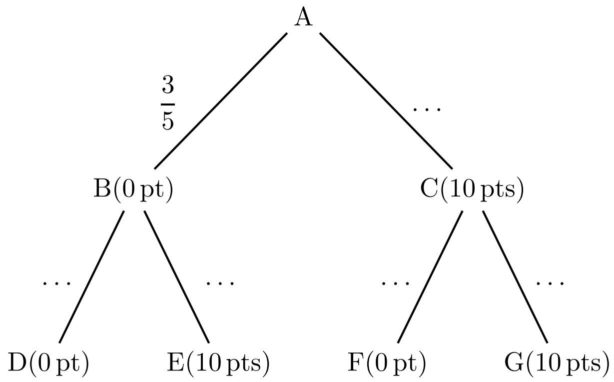
3. (a) On souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, la plus petite valeur de n à partir de laquelle a_n est supérieur à 1100.
   En **ANNEXE 2**, un seul algorithme convient. Dire lequel et le compléter.
   (b) Déterminer, en complétant le tableau associé en **ANNEXE 2**, la valeur de l'entier n. Interpréter.

4. On cherche à savoir si, un jour donné, les deux bassins peuvent avoir, au mètre cube près, le même volume d'eau. Proposer une méthode pour répondre à ce problème.

• ○ • ○ •

EXERCICE 6 **6 points**

Un joueur dispose d'une table inclinée où une bille, lancée d'un point A, peut suivre différents chemins. Elle rencontre plusieurs noeuds sur son chemin.



À chaque fois, la probabilité qu'elle prenne le chemin de gauche est de $\frac{3}{5}$.
Un joueur lance une bille qui part de A, puis emprunte obligatoirement une des branches indiquées sur l'arbre ci-dessous pour arriver à l'un des points D, E, F ou G.

Les nombres entre parenthèses indiquent les points gagnés par le joueur lors du passage de la bille.
Par exemple, le trajet A-C-F rapporte 10 points.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre total de points gagnés à l'issue d'une partie, c'est-à-dire une fois la bille arrivée en D, E, F ou G.

1. Dans cette question, les résultats sont attendus sous forme de fraction.
   (a) Montrer que $P(X = 20) = \frac{4}{25}$
   (b) Déterminer la loi de probabilité de X.
   (c) Calculer l'espérance de X.

2. Le joueur effectue 20 parties et on suppose que ces 20 parties sont indépendantes. On considère qu'une partie est gagnée si le joueur obtient 20 points à cette partie.
   On note Y la variable aléatoire qui donne le nombre de parties gagnées.
   (a) Justifier que la loi de probabilité suivie par Y est une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
   (b) Calculer la probabilité qu'il gagne exactement 7 parties. Arrondir au millième.
   (c) Calculer la probabilité qu'il gagne au moins 5 parties. Arrondir au millième.

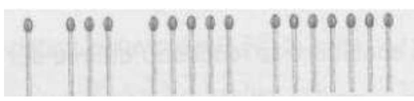
3. Donner $[a; b]$ l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% des effectifs des parties gagnées par le joueur. Interpréter cet intervalle en termes d'échantillons de 20 parties.

4. Corriger les erreurs contenues dans l'algorithme de l'**ANNEXE 3** pour qu'il affiche en sortie $P(X \leqslant 10)$.

• ○ • ○ •

EXERCICE 7 **En BONUS**

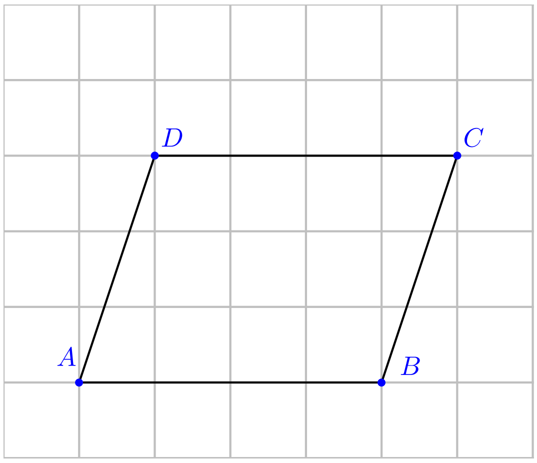
Une boîte contient 200 allumettes.
On les regroupe par « paquets » de la manière suivante :



On place une allumette dans le premier « paquet », puis on place trois allumettes dans le « paquet » suivant, puis 5 allumettes dans celui d'après et ainsi de suite.
Á la fin, il ne reste plus que 4 allumettes dans la boîte.

Combien y a-t-il de « paquets » d'allumettes ?

ANNEXE 1 : ***exercice 4***



ANNEXE 2 : ***exercice 5 question 3.a et 3.b***

Algorithme 1

Entrée :	a et n sont des nombres
Initialisation :	a prend la valeur 800
	n prend la valeur 0
Traitement :	Tant que $a \leqslant 1100$
	a prend la valeur $0,75a + 330$
	n prend la valeur ...
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher ...

Algorithme 2

Entrée :	a et n sont des nombres
Initialisation :	a prend la valeur 800
	n prend la valeur 0
Traitement :	Tant que $a \geqslant 1100$
	a prend la valeur $0,75a + 330$
	n prend la valeur ...
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher ...

Tableau à compléter :

	Initialisation	Étape 1	Étape 2				
a	800	...	...				
n	0	1	2				

ANNEXE 3 : ***exercice 6 question 4***

Corriger les erreurs

Entrée :	S, P, k sont des nombres
Initialisation :	S prend la valeur 0
Traitement :	Pour k allant de 1 à 10
	P prend la valeur $\binom{20}{k}\left(\frac{4}{25}\right)^k \times \left(1 - \frac{4}{25}\right)^{20-k}$
	S prend la valeur P
	Fin Pour
Sortie :	Afficher P