EXERCICE 1 :

Un grand lessivier commercialise son produit pour lave-vaisselle sous forme solide. Les doses se présentent sous forme parallélépipède rectangle de dimensions x, y et $2x$ en centimètres ($1 \leqslant x \leqslant 2$). Chaque lavage nécessite une dose de 12 cm^3.
Pour économiser l'emballage, on cherhce à avoir une surface totale minimale.

1. Faire un schéma et exprimer y en fonction de x.

2. (a) Montrer que la surface totale de ce parallélépipède est
$$S(x) = 4x^2 + \frac{36}{x} \text{ définie sur } [1;2]$$
   (b) Montrer que $S'(x)$ a le même signe que $x^3 - \dfrac{9}{2}$.

3. **Étude d'une fonction auxiliaire**
   (a) Dresser le tableau de variations de la fonction u définie sur $[1;2]$ par $u(x) = x^3 - \dfrac{9}{2}$.
   (b) En déduire que l'équation $u(x) = 0$ a une unique solution α dans $[1;2]$ et en donner une valeur approchée à la calculatrice à $0,1$ près.
   (c) En déduire le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.

4. En déduire le tableau de variations de S.

5. (a) Quelle valeur de x rend S minimale ?
   (b) Quelles sont les dimensions de la dose correspondante ?

• ◯ • ◯ •

EXERCICE 2 :

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel.
Soit x_1,x_2, ...,x_n les valeurs d'une série statistique. On note $\overline{x}$ sa moyenne et σ son écart-type.
Soit k le nombre de valeurs de la série statistique vérifiant

$$|x_i - \overline{x}| < 2\sigma, \text{ avec } \sigma > 0.$$

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \geqslant 4(n-k)\sigma^2$.
2. En déduire que $k \geqslant \dfrac{3}{4}n$.
3. Recopier et compléter la phrase suivante : « Au moins .... % des valeurs d'une série statistique appartiennent à l'intervalle $[\overline{x} - 2\sigma; \overline{x} + 2\sigma]$. »
4. En vous inspirant des questions précédentes, montrer qu'au moins 88% des valeurs d'une série statistique appartiennent à l'intervalle $[\overline{x} - 3\sigma; \overline{x} + 3\sigma]$.

AIDE : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = (x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots\ldots + (x_n - \overline{x})^2$

• ◯ • ◯ •