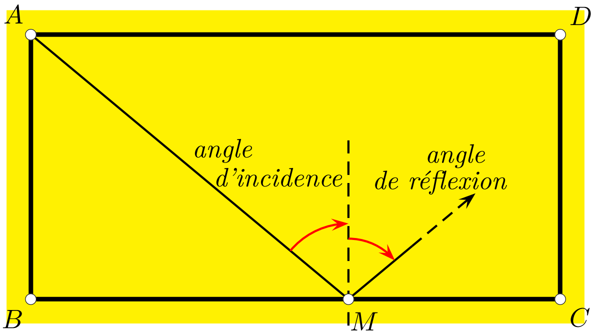
EXERCICE 1 :

Un billard rectangulaire $ABCD$ a pour dimensions $AB = DC = a$, $AD = BC = b > a$.
Une boule part de A et frappe successivement les bandes BC, CD, DA en des ponts M, N, P. Elle s'arrête après avoir bouclé un quadrilatère $MNPQ$. L'angle de réflexion est égal chaque fois à l'angle d'incidence. (*voir figure*)
On pose $\boxed{BM = x}$.



1. Entre quelles limites doit être compris x pour que les bandes soient frappées dans cet ordre ?
   Quelle est alors la forme du quadrilatère $MNPQ$?
2. Monter que les droites supportant les côtés du quadrilatère passent chacune par un point fixe. (*le résultat de cette question n'est pas nécessaire pour la suite*)
3. Montrer que l'aire du quadrilatère $MNPQ$ est
$$\mathcal{A}(x) = \frac{2a(b-x)(2x-b)}{x}$$
4. Dresser le tableau de variations de la fonction $\mathcal{A}$ sur l'intervalle trouvé à la question 1.
5. Déterminer x pour que
   (a) $\mathcal{A}(x)$ atteigne son maximum.
   (b) $MNPQ$ soit un rectangle.
   (c) $MNPQ$ soit un losange.
   Deux de ces conditions peuvent-elles être réalisées en même temps ?

• ○ • ○ •

EXERCICE 2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{-x^2 + bx + 3}{x+1} \quad (b \text{ est un paramètre réel})$$

1. Comment faut-il choisir b pour que f n'admette pas d'extremum ?
2. Déterminer alors b pour que la courbe représentative de f admette au point d'abscisse 2 une tangente parallèle à la droite d'équation $2x + 2y - 3 = 0$.

• ○ • ○ •