EXERCICE 1 :

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et, pour tout entier naturel } \ n, u_{n+1} = u_n + 2n + 2.$$

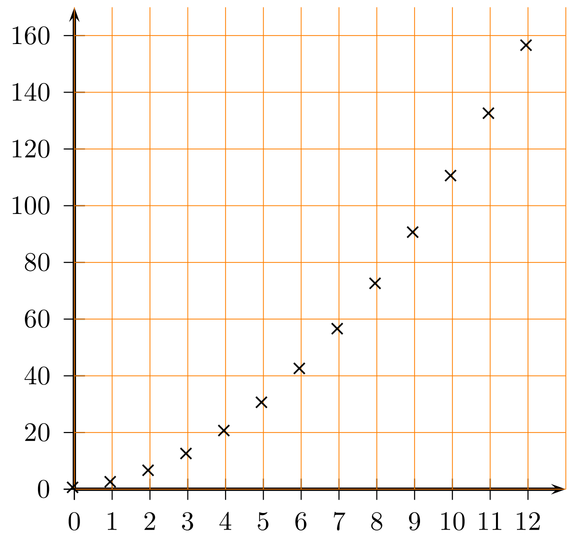
1. Calculer u_1 et u_2.
2. On considère les deux algorithmes suivants :

Algorithme 1		**Algorithme 2**	
Variables :	n est un entier naturel	**Variables :**	n est un entier naturel
	u est un réel		u est un réel
Entrée :	Saisir la valeur de n	**Entrée :**	Saisir la valeur de n
Traitement :	u prend la valeur 0	**Traitement :**	u prend la valeur 0
	Pour i allant de 1 à n :		Pour i allant de 0 à $n-1$:
	u prend la valeur $u + 2i + 2$		u prend la valeur $u + 2i + 2$
	Fin Pour		Fin Pour
Sortie :	Afficher u	**Sortie :**	Afficher u

De ces deux algorithmes, lequel permet d'afficher en sortie la valeur de u_n, la valeur de l'entier naturel n étant entrée par l'utilisateur ?

3. À l'aide de l'algorithme, on a obtenu le tableau et le nuage de points ci-dessous où n figure en abscisse et u_n en ordonnée.

n	u_n
0	0
1	2
2	6
3	12
4	20
5	30
6	42
7	56
8	72
9	90
10	110
11	132
12	156



   (a) Quelle conjecture peut-on faire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
   Démontrer cette conjecture.

   (b) La forme parabolique du nuage de points amène à conjecturer l'existence de trois réels a, b et c tels que, pour tout entier naturel n, $u_n = an^2 + bn + c$.
   Dans le cadre de cette conjecture, trouver les valeurs de a, b et c à l'aide des informations fournies. Est-on sûr que l'expression de u_n est celle que l'on a trouvée, pour tout $n \in \mathbb{N}$?

4. On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par : $v_n = u_{n+1} - u_n$.

   (a) Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n.

   (b) On définit, pour tout entier naturel n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et on rappelle que

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

   Démontrer que, pour tout entier naturel n, $S_n = (n+1)(n+2)$.

   (c) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $S_n = u_{n+1} - u_0$, puis exprimer u_n en fonction de n.

• ○ • ○ •

EXERCICE 2 :

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2}.$$

Partie A : Conjecture

1. Calculer les valeurs exactes, données en fractions irréductibles, de u_1 et u_2.
2. Donner une valeur approchée à 10^{-5} près des termes u_3 et u_4.
3. Conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).

Partie B : Validation des conjectures

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n, par :
$v_n = u_n - 3$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\dfrac{1}{2}v_n^2$.
2. On admet que, pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$.
   (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = -v_n\left(\dfrac{1}{2}v_n + 1\right)$.
   (b) En déduire le sens de variation de la suite (v_n).
3. On note ℓ la limite de la suite (v_n).
   On admet que ℓ appartient à l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$ et vérifie l'égalité : $\ell = -\dfrac{1}{2}\ell^2$.
   Déterminer la valeur de ℓ.
4. Les conjectures faites dans la **partie A** sont-elles validées ?

• ○ • ○ •