$\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des nombres relatifs et $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels.

- Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont stables pour l'addition et la multiplication.

  ...

- Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

  Cette propriété est-elle vraie pour $\mathbb{Z}$?

- Toute suite strictement décroissante d'entiers naturels est finie.

I Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

1. Définition

Définition 1 *On considère deux entiers relatifs a et b, b étant non nul.*
On dit que b ***divise*** *a s'il existe un entier relatif k tel que* $\mathbf{a} = \mathbf{kb}$*.*
On dit aussi que b ***est un diviseur de*** *a ou a* ***est un multiple de*** *b.*

Notation : b divise a se note $\mathbf{b|a}$

$a = kb \Leftrightarrow a = (-k) \times (-b) \Leftrightarrow -a = (-k) \times (b)$ donc ...

Pour rechercher les diviseurs d'un nombre relatif a dans $\mathbb{Z}$, il suffit de déterminer les diviseurs de l'entier naturel $|a|$ dans $\mathbb{N}$.

Exemple 1 Diviseurs de 12 ?

Conséquences :
- Tout entier relatif divise 0.
- Les seuls diviseurs de 1 et -1 sont 1 et -1 puis -1 et 1 divisent tout entier relatif a.
- Tout entier non nul a admet un nombre fini de diviseurs parmi lesquels 1,-1,a et $-a$.
- L'ensemble des multiples de a dans $\mathbb{Z}$ est ...
  On le note ...

2. Propriétés

Propriété 1 Soit a,b et c trois entiers relatifs non nuls.
1. Si $c|b$ et $b|a$ alors $c|a$.
2. Si a divise b et b divise a alors a et b sont égaux ou opposés.
3. (important) Si c divise a et b alors, pour tout entiers relatifs u et v, c divise $au + bv$.

Démonstrations : 1 : ...

2 : ...

3 : ...

Exemple 2 utilisation de la propriété 3 :
On veut déterminer les entiers relatifs n ($n \neq -2$) tels que $\dfrac{2n-29}{n+2}$ soit un entier.

II Division Euclidienne

1. Division Euclidienne dans $\mathbb{N}$

Théorème 1 Soit a un entier naturel et b un entier naturel non nul.
Il existe un unique couple $(\mathbf{q};\mathbf{r})$ d'entiers naturels satisfaisant aux deux conditions :

$$\mathbf{a = bq + r} \quad \text{et} \quad \mathbf{0 \leqslant r < b}$$

q est le **quotient** et r le **reste** de la **division euclidienne** de a par b.

Démonstration difficile : voir annexe $\longrightarrow$ `http://www.mimaths.net/IMG/pdf/demodivisioneuclidienne.pdf`

Remarque 1 :
1. On a donc, avec $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$:
a est divisible par b si et seulement si le reste r dans la division euclidienne de a par b est nul.
2. Utilisation de la calculatrice pour déterminer le quotient :
CASIO $\longrightarrow$ Intg($a \div b$) (OPTN puis NUM) puis TI $\longrightarrow$ partEnt(a/b) (Maths puis Num)

Exemple 3 Dans chaque cas, écrire la division euclidienne de a par b :
- $a = 2013$ et $b = 35$;
- $a = 5000$ et $b = 17$;
- $a = 18$ et $b = 50$.

Exemple 4 Le reste de la division euclidienne de 2015 par l'entier naturel b est 500.
Quelles sont les valeurs possibles de b ?

EXERCICE 1 Un entier a s'écrit sous la forme $a = 8k + 6$ où k est un entier. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de a par 4

2. Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Théorème 2 Soit a un entier relatif et b un entier naturel non nul.
Il existe un unique couple $(\mathbf{q};\mathbf{r})$ d'entiers **relatifs** satisfaisant aux deux conditions :

$$\mathbf{a = bq + r} \quad \text{et} \quad \mathbf{0 \leqslant r < |b|}$$

q est le **quotient** et r le **reste** de la **division euclidienne** de a par b.

Exemple 5 Écrire la division euclidienne de -5000 par 17.

3. « Découpage de $\mathbb{N}$ »
Justifier le fait que tout entier naturel n s'écrit nécessairement sous l'une des trois formes $3k$, $3k+1$ ou $3k+2$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que dans la division euclidienne de $n^2 + n$ par 3, le reste n'est jamais égal à 1.

III Langage des congruences

III.1 Définition

Définition 2 *Soit n un entier naturel non nul. on dit que a et b sont congrus modulo n si, et seulement si, a et b ont même reste dans la division euclidienne par n.*
On dit aussi que a est congru à b modulo n.
Notation : *$a \equiv b(n)$ ou $a \equiv b$ (modulo n) ou $a \equiv b[n]$*

Exemples :
- $54 \equiv \ldots (7)$
- $-78 \equiv \ldots (5)$
- $x \equiv 1(6) \Leftrightarrow \ldots$

Remarque 2 : La relation de congruence vérifie les mêmes propriétés que celles de l'égalité
- $a \equiv a(n)$ (la relation de congruence est réflexive)
- $a \equiv b\ (n) \quad \Leftrightarrow \quad b \equiv a\ (n)$ (la relation de congruence est symétrique)

Théorème 3 Soit n un entier naturel ($n \geqslant 2$) et a et b, deux entiers relatifs.

$$a \equiv b(n) \quad \Leftrightarrow \quad a - b \text{ est un multiple de } n$$

...

Conséquence importante : Dire que r est le **reste** dans la division euclidienne de a par n équivaut à $\begin{cases} a \equiv r(n) \\ 0 \leqslant r < n \end{cases}$

III.2 Propriétés

Propriété 2 Si $a \equiv b(n)$ et si $b \equiv c(n)$, alors $a \equiv c(n)$ (on dit que la relation de congruence est **transitive**)

...

Propriété 3 Congruence et opérations
Soit a,a',b et b' des entiers relatifs et n un entier naturel non nul
- Si $a \equiv a'(n)$ et si $b \equiv b'(n)$, alors $a + b \equiv a' + b'(n)$.
- Si $a \equiv a'(n)$ et si $b \equiv b'(n)$, alors $ab \equiv a'b'(n)$.
- Si $a \equiv b(n)$ et si p appartient à $\mathbb{N}^*$, alors $a^p \equiv b^p(n)$.

...

III.3 Exemples

Exemple 6 : Quel est le reste de la division euclidienne de 23^{41} par 7 ?
Montrer que 2^{342} a pour reste 4 dans la division par 5.

Exemple 7 : Démontrer que $1^{2013} + 2^{2013} + 3^{2013} + 4^{2013}$ est divisible par 5.

Exemple 8 Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\quad n^2 + 4n + 7 \equiv 3(n+2)$
En déduire le reste dans la division euclidienne du nombre $n^2 + 4n + 7$ par le nombre $n + 2$

Exemple 9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que n a le même reste dans la division par 9 que la somme de ses chiffres.
poser $n = \overline{a_p a_{p-1} \dots a_1 a_0}$

Exemple 10 (important)
Montrer que pour tout entier relatif n, $\; n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 3