Étude de la suite récurrente définie par $u_{n+1} = \cos(u_n)$ et $u_0 \in \mathbb{R}$.

■■■

I Méthode 1

I.1 Intervalle stable

- $u_0 \in \mathbb{R}$;
- $u_1 = \cos(u_0) \in [-1, 1]$;
- $u_2 = \cos(u_1) \in [0, 1]$; (un cercle trigonométrique permet de bien voir)

Dès lors une récurrence élémentaire, conduit à prouver que $\forall n \geqslant 2,\ u_n \in [0, 1]$.
(pour $x \in [0, 1],\ \cos(x) \in [\cos(1), 1] \subset [0, 1]$)

I.2 Point fixe

Si (u_n) converge alors sa limite l vérifie $\cos(l) = l \Leftrightarrow \cos(l) - l = 0$.

On pose $h(x) = x - \cos(x)$ définie sur $I_s = [0, 1]$. h est dérivable sur I_s (donc continue sur I_s) et pour tout $x \in I_s,\ h'(x) = 1 + \sin(x)$. Pour tout $x \in I_s,\ h'(x) > 0$ ($\sin(x) > 0$ sur I_s) et h est strictement croissante sur I_s.

$h(0) = -1$ et $h(1) = 1 - \cos(1) > 0$, donc le théorème de la bijection assure l'existence d'un unique $l \in [0, 1]$ tel que $h(l) = 0 \Leftrightarrow l - \cos(l) = 0 \Leftrightarrow \cos(l) = l$.

($l \approx 0,73908$ par défaut)

I.3 Convergence de (u_n) vers l

$\forall x \in [0, 1],\ \cos'(x) = -\sin(x)$ et pour tout $x \in I_s$, $\sin(x) \in [0, \sin(1)]$.

On peut donc écrire que $\forall x \in I_s,\ |\cos'(x)| = |-\sin(x)| \leqslant \sin(1) < 0,9$ (0,9 par exemple, d'autres valeurs sont possibles dès lors qu'elles sont strictement inférieure à 1)
On applique l'inégalité des accroissements finis à la fonction cos sur $[a, b] \subset I_s$ (les conditons de continuité et de dérivabilité sur I_s étant remplies, la majoration de $|\cos'(x)|$ par 0,9 sur I_s)

$$\text{IAF} \Rightarrow\ |\cos(b) - \cos(a)| \leqslant 0,9|b - a|.$$

Comme $\forall n \geqslant 2,\ u_n \in I_s,\ l \in I_s$, on a $|\cos(u_n) - \cos(l)| \leqslant 0,9|u_n - l| \Rightarrow |u_{n+1} - l| \leqslant 0,9|u_n - l|$.

Un autre raisonnement par récurrence permet d'écrire que pour tout $n \geqslant 2$,

$$|u_n - l| \leqslant (0,9)^{n-2}|u_2 - l| \leqslant (0,9)^{n-2} \quad \text{(en effet } |u_2 - l| < 1)$$

Désormais $(0,9)^{n-2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \underset{comparaison}{\Rightarrow} |u_n - l| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

II Méthode 2

II.1 Intervalle stable

Comme dans la méthode 1, on obtient $I_s = [0, 1]$ stable pour $n \geqslant 2$.
Sur cet intervalle la fonction cos est strictement décroissante.

II.2 Point fixe

Idem méthode 1.

II.3 Suites extraites

La monotonie de cos sur l'intervalle I_s conduit à explorer la piste des deux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

$\triangleright$ sens de variation de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$: $u_{2n} \in I_s$ pour $n \geqslant 1$. On pose $f = \cos \text{ o } \cos$, comme cos est décroissante sur I_s, f est croissante sur I_s
(composée de 2 fonctions décroissantes sur I_s est croissante sur I_s).

On a $u_{2n+2} = f(u_{2n})$ avec f croissante sur I_s implique que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone (mais le sens de variation dépend ici de la valeur de u_0 dans $\mathbb{R}$) ; cette propriété se démontrant par récurrence.

En effet soit par exemple u_0 pour lequel $u_2 \geqslant u_0$, l'hypothèse de récurrence $u_{2n} \geqslant u_{2n-2}$ devient, comme f est croissante sur I_s, $f(u_{2n}) \geqslant f(u_{2n-2}) \Leftrightarrow u_{2n+2} \geqslant u_{2n}$; ce qui permettrait de prouver l'hérédité et de justifier que (u_{2n}) est croissante. (idem pour u_0 donnant (u_{2n}) décroissante)

$\triangleright$ sens de variation de $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$: $\forall n \geqslant 0$, $u_{2n+3} - u_{2n+1} = \cos(u_{2n+2}) - \cos(u_{2n})$. De plus, cos est décroissante sur I_s.

- Si (u_{2n}) est croissante alors $u_{2n+2} \geqslant u_{2n}$, donc $\cos(u_{2n+2}) \leqslant \cos(u_{2n}) \Leftrightarrow \cos(u_{2n+2}) - \cos(u_{2n}) \leqslant 0 \Rightarrow u_{2n+3} - u_{2n+1} \leqslant 0$ et (u_{2n+1}) est décroissante ;
- De même (u_{2n}) décroissante implique (u_{2n+1}) est croissante.

Les deux suites extraites sont monotones avec des sens de variation différents.
Elles sont bornées grâce à la stabilité de I_s, elles sont donc convergentes.

II.4 Limite commune des deux suites extraites

Comme $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge, sa limite α vérifie $f(\alpha) = \alpha$. (on rappelle que $f = \cos \text{ o } \cos$)
f est une composée de fonctions dérivables sur I_s (stable par cos) donc f est dérivable sur I_s.

En posant $k(x) = x - f(x)$, on cherche donc dans I_s la valeur qui vérifie $k(x) = 0$.

$\forall x \in I_s$, $k'(x) = 1 - \sin(x)\sin(\cos(x))$ et $k'(x) > 0$ sur $[0, 1]$.

En effet, on peut écrire successivement $\cos(1) \leqslant \cos(x) \leqslant 1 \underset{\sin \nearrow\nearrow}{\Longrightarrow} \sin(\cos(1)) \leqslant \sin(\cos(x)) \leqslant \sin(1) < 1 \Longrightarrow -\sin(\cos(x)) > -1 \Longrightarrow k'(x) > 0$.

De plus, $k(0) = -1$ et $k(1) > 0$ donc la fonction k qui est continue et strictement croissante sur I_s s'annule une **<u>seule</u>** fois sur I_s en α.

De plus, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge aussi, admet également α comme limite (α unique solution de $k(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$).

Or $k(l) = l - \cos(\cos(l)) \underset{\cos(l)=l(I.2)}{=} l - \cos(l) = l - l = 0$, donc l'unicité de α impose que $\alpha = l$.

II.5 Convergence de (u_n)

D'après ce qui précède, les deux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite l.
Un théorème assure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l (ceci indépendamment de la valeur de u_0)