$a$ et $b$ deux nombre réels tels que $a > b$.

$\varphi = \dfrac{a}{b}$ avec $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a+b}{a}$ : $\varphi$ est le nombre d'or. $(\bigstar)$ $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a+b}{a} \Leftrightarrow a^2 = ab + b^2$

# I Partie A

1. $\varphi^2 - \varphi - 1 = \dfrac{a^2}{b^2} - \dfrac{a}{b} - 1 = \dfrac{a^2 - ab - b^2}{b^2} \underset{(\bigstar)}{=} \dfrac{0}{b^2} = 0$ donc $\varphi$ est solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

   L'autre solution est négative (à vérifier) donc c'est la solution positive. $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,62$ arrondie à $10^{-2}$ près.

2. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a+b}{a} = 1 + \dfrac{1}{\frac{a}{b}} \Leftrightarrow \varphi = 1 + \dfrac{1}{\varphi}$.

   $\varphi$ solution de $x^2 - x - 1 = 0$ donc $\varphi^2 = 1 + \varphi$, et comme $\varphi > 0$, $\varphi = \sqrt{1+\varphi}$

• ○ • ○ •

# II Partie B

1. Laissée à la sagacité du lecteur. On peut conjecturer que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \varphi$

2. Il semblerait que $(u_n)$ soit croissante et majorée par $\varphi$ ;

   démontrons que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \varphi$ (il s'agit de la propriété $\mathcal{P}(n)$).

   Cela se démontre par récurrence. Nous l'avons déjà vu à de nombreuses reprises cette année. Par exemple, exercice 1 du cours page 19. Utiliser la croissance de la fonction racine carrée sur $[0; +\infty[$ et le fait que $\varphi = \sqrt{1+\varphi}$ pour l'hérédité.

   Une fois démontrée, le théorème de convergence monotone permet de dire que la suite $(u_n)$ est convergente puisque croissante et majorée. D'après le théorème du cours page 20, elle converge vers le nombre positif $x$ vérifiant $x = 1 + \dfrac{1}{x}$, il s'agit de $\varphi$.

3(a) Toujours par récurrence ! (on ne sait pas que $v_n > 0$ pour tout $n$)

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - \varphi \underset{A.2}{=} v_{n+1} - 1 - \dfrac{1}{\varphi} = 1 + \dfrac{1}{v_n} - 1 - \dfrac{1}{\varphi} = \dfrac{1}{v_n} - \dfrac{1}{\varphi} = \dfrac{\varphi - v_n}{\varphi v_n}$

(c) On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_{n+1} - \varphi| = \left|\dfrac{\varphi - v_n}{\varphi v_n}\right| \underset{\varphi>0,\, v_n \geqslant 1 > 0}{=} \dfrac{1}{\varphi} \times \dfrac{|v_n - \varphi|}{v_n}$. Or $v_n \geqslant 1 \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{v_n} \leqslant 1$ donc, par reconstruction, $\dfrac{1}{\varphi} \times \dfrac{|v_n - \varphi|}{v_n} \leqslant \dfrac{1}{\varphi}|v_n - \varphi|$ et on obtient l'inégalité voulue.

(d) On souhaite démontrer, que pour tout $n$, $|v_n - \varphi| \leqslant \left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^n$ $\mathcal{P}(n)$. Cela se fait par récurrence :

- **Initialisation :** $|v_0 - \varphi| \approx 0,38$ et $\left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^0 = 1$, donc $|v_0 - \varphi| \leqslant \left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^0$ et $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$ vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} |v_{n+1} - \varphi| &\underset{B.3.c}{\leqslant} \frac{1}{\varphi}|v_n - \varphi| \\ &\underset{\mathcal{P}(n)\ vraie}{\leqslant} \frac{1}{\varphi} \times \left(\frac{1}{\varphi}\right)^n \qquad \text{donc } P(n+1) \text{ est vraie.} \\ &\leqslant \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

- **Conclusion :** Ainsi, d'après le principe du raisonnement par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|v_n - \varphi| \leqslant \left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^n$

(e) $|v_n - \varphi| \leqslant \left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^n \Leftrightarrow -\left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^n \leqslant v_n - \varphi \leqslant \left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^n$. Comme $\dfrac{1}{\varphi} \in ]0; 1[$, la suite géométrique $\left(\left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^n\right)$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^n = 0$. Par conséquent, l'utilisation du théorème des gendarmes permet de dire que la suite $(v_n - \varphi)$ converge et tend vers 0. De plus, $v_n = (v_n - \varphi) + \varphi$, donc par addition de limites, $(v_n)$ converge et

$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \varphi$. On a $|v_5 - \varphi| \leqslant \left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^5$ et $\left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^5 \approx 9 \times 10^{-2}$ donc $v_5$ approche le nombre d'or à environ 0,09 près.